Dominance de Lorenz itérée et recherche de solutions équitables en optimisation combinatoire multi-agents

Boris Golden et Patrice Perny
LIP6 – UPMC

ROADEF '09

Les critères de décision standards face à l'équité

On considère le problème d'affectation suivant :

- 5 objets à affecter à 5 agents (un objet par agent)
- matrice de coûts (coût d'attribuer l'objet i à l'agent j) :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & (4) & 9 & \mathbf{8} \\ \mathbf{1} & (3) & 2 & 7 & 8 \\ (3) & 9 & \mathbf{2} & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 3 & (\mathbf{3}) & 4 \\ 5 & \mathbf{1} & 7 & 7 & (3) \end{pmatrix}$$

- Optimiser la somme des coûts : $(8, 1, 2, 3, 1)$, coût total 15
- Une solution plus *équitable* : $(4, 3, 3, 3, 3)$, coût total 16
- Le Minimax a d'autres défauts : $(100, 0)$ et $(99, 99)$
- Quel critère utiliser pour avoir des solutions *équitables* ?

Définition formelle

P problème d'optimisation mono-critère *multi-agents* :

- n agents $N = \{1, \ldots, n\}$ à considérer pour optimiser P
- vecteur de coûts associé à une solution du problème P :
  $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ (x_i = coût de la solution pour agent i)
- comparer des solutions = comparer leurs vecteurs de coûts

Optimisation *équitable* d'un tel problème, équilibre entre :

- juste répartition des coûts entre les agents
- mais également performance globale

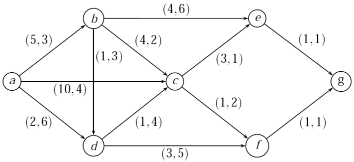
Les deux objectifs de l'exposé :

- disposer d'un critère qui quantifie l'équité
- l'optimiser efficacement sur un problème combinatoire

Exemples de problèmes équitables

Version équitable des problèmes classiques en optimisation :

- affectation, multi-matching pour réseaux sociaux (Meetic)
- arbre couvrant, plus court chemin...



Plus court chemin pour 2 robots allant de a à g.

Approche très *économique* de l'équité. D'autres approches :

- Paper assignment problems : par exemple [Goldsmith and Sloan 07, Wang et al. 08]
- Allocation équitable de ressources indivisibles : par exemple [Bouveret and Lang, 05]

Définitions préliminaires

Dominance de Pareto

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+^n : x \succsim_P y \iff [\forall i \in N, x_i \leq y_i)]$
$x \succ_P y \iff [x \succsim_P y \text{ and } \text{not}(y \succsim_P x)]$

Propriétés définies pour une relation de préférence $\succsim$:

Symétrie

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n$, pour toute permutation π de $\{1, \dots, n\}$, $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \sim (x_1, \dots, x_n)$

P-Monotonie

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, $x \succsim_P y \Rightarrow x \succsim y$ et $x \succ_P y \Rightarrow x \succ y$

La dominance de Lorenz : introduction

Formaliser la notion intuitive de *répartir les coûts* :

Principe de transfert (de Pigou-Dalton)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $x_i > x_j$ pour 2 coordonnées i, j.
Alors, $\forall \varepsilon$ tq $0 < \varepsilon < x_i - x_j$, on a : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succ x$

Exemple : $y = (9, 10, 9, 10) \succ x = (11, 10, 7, 10)$

Combiné à l'idée de P-monotonie, on choisit les vecteurs les plus équitables et les plus performants. Pour comparer $w = (8, 10, 9, 10)$ et $z = (11, 10, 7, 12)$, on remarque que :

- $w \succ y$ par P-monotonie car $(8, 10, 9, 10) \succ_P (9, 10, 9, 10)$
- $y \succ x$ par le principe de transfert (exemple ci-dessus)
- $x \succ z$ par P-monotonie car $(11, 10, 7, 10) \succ_P (11, 10, 7, 12)$
- et donc $w \succ z$ par transitivité.

La dominance de Lorenz : caractérisation

Vecteur de Lorenz (généralisé)

Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, le vecteur de Lorenz généralisé est défini par :

$$L(x) = (x_{(1)}, x_{(1)} + x_{(2)}, \ldots, x_{(1)} + x_{(2)} + \ldots + x_{(n)})$$

où $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \ldots \geq x_{(n)}$.
La j^{ieme} composante de $L(x)$ est $L_j(x) = \sum_{i=1}^{j} x_{(i)}$.

Dominance de Lorenz

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^n, \; x \succsim_L y \iff L(x) \succsim_P L(y)$

Théorème de Chong

La dominance de Lorenz est le plus petite relation transitive vérifiant : Symétrie, P-monotonie et Principe de transfert.

Un critère pas suffisamment discriminant

Malheureusement, on peut construire des problèmes où tous les vecteurs réalisables sont non-dominés au sens de Lorenz.
Problème d'affectation avec m objets à distribuer à 2 agents :

- coûts d'affectation : $c_{1j} = 2^j$ et $c_{2j} = 2^{j-1}$, $j = 1 \ldots m-1$, $c_{1m} = 0$, $c_{2m} = 2^m + 1$.
- 2^m affectations de vecteurs de coûts $\{(2k, 3 \times 2^{m-1} - k), k \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$.
- ensemble de vecteurs de Lorenz correspondant : $\{(3 \times 2^{m-1} - k, 3 \times 2^{m-1} + k), k \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}\}$.
- $\rightarrow$ nécessité de raffiner la dominance de Lorenz

Exemple : famille des Ordered Weighted Averages (OWA)

Combinaison linéaire de coûts après tri :
$W(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} (w_i - w_{i+1}) L_i(x)$

Itérer pour raffiner

- $\succ_L$ raffine $\succ_P$
- Donc, si $L(x)$ et $L(y)$ pas comparables $\succ_P$, peut-être qu'ils le sont par $\succ_L$.
- Et l'on peut itérer le procédé !

Dominance de Lorenz d'ordre k : $\succsim_L^k$

$$L^k(x) = \begin{cases} L(x) & \text{if } \; k = 1 \\ L(L^{k-1}(x)) & \text{if } \; k > 1 \end{cases}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^n, \; x \succsim_L^k y \iff L^k(x) \succsim_P L^k(y)$$

Stricte dominance de Lorenz d'ordre infini

$\succ_L^\infty = \bigcup_{k \geq 1} \succ_L^k$ *(les $\succ_L^k$ sont des ordres emboîtés)*

Algorithme pour tester la stricte L^∞-dominance

Pour comparer $x = (3, 2, 3, 2)$ et $y = (3, 3, 3, 0)$:

- $L(x) = (3, 6, 8, 10)$ et $L(y) = (3, 6, 9, 9) \to$ pas de dominance
- $L^2(x) = (10, 18, 24, 27)$ et $L^2(y) = (9, 18, 24, 27) \to y \succ_L^\infty x$.

Algorithm 1: Testing strict L^∞-dominance

$u \leftarrow x$;
$v \leftarrow y$;
while [not($u \succ_P v$ or $v \succ_P u$)] **do**
  $u \leftarrow L(u)$;
  $v \leftarrow L(v)$;
end
if ($u \succ_P v$) **then** $x \succ_L^\infty y$;
if ($v \succ_P u$) **then** $y \succ_L^\infty x$

- comment savoir quand l'algorithme termine ?
- on va exprimer L^∞ directement sur les vecteurs !

Expression matricielle du vecteur de Lorenz

- Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, on note $x^\uparrow$ le vecteur croissant trié de x
- On remarque que : $L(x^\uparrow) = L(x)$
- Soit $\mathcal{L}$ la matrice $n \times n$ telle que $l_{ij} = 1$ si $i + j > n$, 0 sinon :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 1

Pour $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall k, L^k(x) = \mathcal{L}^k . x^\uparrow$

On peut diagonaliser $\mathcal{L}$ (matrice symétrique réelle) de la façon suivante : $\mathcal{L} = {}^tP.A.P$ avec A matrice diagonale.

Réécriture de la dominance d'ordre k

- On décompose $\mathcal{L}^k$ en n lines $\mathcal{L}^k_1 \dots \mathcal{L}^k_n$ et on a :

$$x \succsim_L^k y \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}^k.x^\uparrow \succsim_P \mathcal{L}^k.y^\uparrow \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L}^k_1.x^\uparrow \leq \mathcal{L}^k_1.y^\uparrow \\ \vdots \\ \mathcal{L}^k_n.x^\uparrow \leq \mathcal{L}^k_n.y^\uparrow \end{array} \right.$$

- A tout ordre, l'itération de Lorenz = intersection de n ordres.
- Structure de la preuve pour exprimer $\succ_L^\infty$:
  - exprimer ces n ordres
  - montrer qu'ils sont équivalents à l'infini
  - montrer que leur équivalent converge vers une limite connue

Convergence de l'itération à l'infini

Lemme 1

$\forall x \in \mathbb{R}_+^n$, $L^k(x) \sim \lambda_1^k \, {}^tP_1 \times \mathcal{W}(x)$ *où* $\mathcal{W}$ *est une fonction OWA.*

Lemme 2

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, $\mathcal{W}(x) < \mathcal{W}(y) \Rightarrow x \succ_L^\infty y$.
$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(y) \Rightarrow x$ et y incomparables par $\succ_L^\infty$.

Théorème de représentation de la L^∞-dominance par un OWA

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^n, \; x \succ_L^\infty y \iff \mathcal{W}(x) < \mathcal{W}(y)$ où
$\mathcal{W}(x) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{(n+1-k)\pi}{2n+1}\right) x_{(k)}$

Propriétés remarquables

- pour comparer 2 vecteurs, pas besoin de l'algorithme
- on sait exactement pour quels couples de vecteurs l'algorithme termine
- poids de $\mathcal{W} > 0$ et strictement décroissants : compatibilité avec L
- jeu de poids particulier pour l'OWA
- la relation *est incomparable avec* est une relation d'équivalence, et on définit donc :

L^∞-dominance faible

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n_+,\ x \succsim_L^\infty y \iff \mathcal{W}(x) \leq \mathcal{W}(y)$$

Le problème de multi-affectation équitable

- On veut affecter m objets à n agents, sachant que :
  - l'agent i peut recevoir entre l_i et u_i objets
  - l'objet j peut être affecté à un nombre d'agents de l_i à u_i
  - le coût d'assigner l'objet j à l'agent i est c_{ij}.
- Paper assignment, social meeting, problèmes de transport
- Formalisation comme PL 0-1 multi-objectif :

$$\text{Min } \; x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} z_{ij}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$s.t. \; \begin{cases} l'_j \leq \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \leq u'_j & j = 1, \dots, m \\ l_i \leq \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \leq u_i & i = 1, \dots, n \\ z_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, \forall j \end{cases}$$

Proposition 2 : le problème de multi-affectation équitable est NP-difficile

Décider si il existe une multi-affectation de coût $\mathcal{W}(x) \leq \alpha$ est NP-complet.

- idée de la preuve : réduction depuis Partition

Formulation en programmation mathématique

Le théorème de représentation permet d'écrire la recherche d'une multi-affectation L^∞-optimale comme le programme mathématique 0-1 non-linéaire suivant :

$$\text{Min} \;\; \mathcal{W}(x) = \sum_{k=1}^{n} w_k x_{(k)} \tag{1}$$

$$(\Pi) \qquad s.t. \begin{cases} x_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij} z_{ij} & i = 1, \ldots, n \\ l'_j \leq \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \leq u'_j & j = 1, \ldots, m \\ l_i \leq \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \leq u_i & i = 1, \ldots, n \\ z_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, \forall j \end{cases} \tag{2}$$

où $w_k = \sin\left(\frac{(n+1-k)\pi}{2n+1}\right)$ pour $k = 1, ..., n$

Linéarisation du critère L^∞

- Soit $w' = (w_1 - w_2,\ w_2 - w_3, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n)$. $w' > 0$.
- On réécrit l'OWA comme une combinaison linéaire des composantes du vecteur de Lorenz :

$$(\Pi') \quad \text{Min}\ \mathcal{W}(x) = \sum_{k=1}^{n} w_k x_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(x) \ \ s.t.\ \ (\textbf{??})$$

- $L_k(x)$, la k^{ieme} composante du vecteur de Lorenz, est la solution du PL suivant (Ogryczak'03) :

$$\text{Max}\ \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i\right) \quad s.t. \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} = k & \\ 0 \leq \alpha_{ik} \leq 1 & i = 1 \ldots n \end{cases}$$

- de dual :

$$\text{Min}\ \left(k\ r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\right) \quad s.t. \begin{cases} r_k + b_{ik} \geq x_i & i = 1 \ldots n \\ b_{ik} \geq 0 & i = 1 \ldots n \end{cases}$$

Formulation linéaire de notre problème

$w' > 0$ donc on peut recoller les morceaux en imbriquant les programmes linéaires en minimisation :

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^{n} w'_k L_k(x) \left(k \times r_k + \sum_{i=1}^{n} b_{ik} \right)$$

$$(\Gamma) \qquad s.t. \begin{cases} l'_j \leq \sum_{i=1}^{n} z_{ij} \leq u'_j & j = 1, \ldots, m \\ l_i \leq \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \leq u_i & i = 1, \ldots, n \\ r_k + b_{ik} \geq \sum_{j=1}^{m} c_{ij} z_{ij} & \forall i, k = 1, \ldots, n \\ b_{ik} \geq 0 & \forall i, k \\ z_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, \forall j \end{cases}$$

Γ est un programme linéaire en variables mixtes

Résultats numériques

Les temps sont donnés en secondes

n =	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t	.04	.38	1.4	3.1	5.1	15	74	120	280	-

TAB 1 – Affectation L^∞-optimale, coûts dans $[\![1; 1000]\!]$

n =	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
t	.98	2.4	11	23	32	58	84	160	230	-

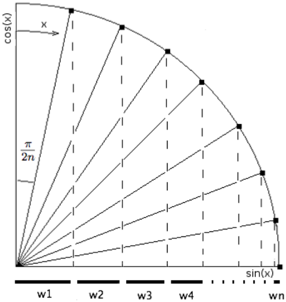
TAB 2 – Affectation L^∞-optimale, coûts dans $[\![1; 20]\!]$

n =	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
t	4.8	10	20	37	57	93	150	220	360	-

TAB 3 – Paper Assignment L^∞-optimal, coûts dans $[\![1; 5]\!]$

Extension de ces résultats au cas pondéré

- équivalent pondéré de L-dominance = dominance stochastique d'ordre 2 (SSD)
- équivalent pondéré de OWA : WOWA (ou critère de Yaari)
- on montre que l'itération dans le cas pondéré converge vers un critère WOWA
- on peut résoudre par un PL très proche de (Γ)



Conclusion

- itération déterminable mathématiquement : on converge vers un OWA
- possibilité de résoudre numériquement par PL des problème comme Paper Assignment pour 1000 agents
- on peut traiter tout pb modélisable en PL par la même approche, multi-affectation n'est qu'un exemple
- interprétation de l'OWA à poids strictement positifs strictement décroissants
- extension possible au cas pondéré du modèle, du théorème de représentation et de la linéarisation