Modèles pour la recherche de solutions équitables en optimisation combinatoire et application aux problèmes d'affectation

Boris Golden

Encadrant : Patrice Perny
Merci à : Olivier Spanjaard

Stage de Recherche - Master 2 IAD

Vendredi 12 septembre 2008

Introduction

- *Équité* : partager en prenant en compte le "mérite" de chacun

Introduction

- *Équité* : partager en prenant en compte le “mérite” de chacun
- Motivation : dans de nombreux problèmes (PAP, Meetic), volonté de *répartir* des coûts entre des agents d'importances variables

Introduction

- *Équité* : partager en prenant en compte le "mérite" de chacun
- Motivation : dans de nombreux problèmes (PAP, Meetic), volonté de *répartir* des coûts entre des agents d'importances variables
- Objectif : optimiser (sans énumération) un critère d'équité dans un ensemble (de grande taille) défini en intention.

Introduction

- *Équité* : partager en prenant en compte le "mérite" de chacun
- Motivation : dans de nombreux problèmes (PAP, Meetic), volonté de *répartir* des coûts entre des agents d'importances variables
- Objectif : optimiser (sans énumération) un critère d'équité dans un ensemble (de grande taille) défini en intention.
- Notre travail : aspects théoriques (formalisation de l'équité, propriétés diverses), aspects "modélisation" (PL en variables mixtes) et expérimentations.

Introduction

- *Équité* : partager en prenant en compte le "mérite" de chacun
- Motivation : dans de nombreux problèmes (PAP, Meetic), volonté de *répartir* des coûts entre des agents d'importances variables
- Objectif : optimiser (sans énumération) un critère d'équité dans un ensemble (de grande taille) défini en intention.
- Notre travail : aspects théoriques (formalisation de l'équité, propriétés diverses), aspects "modélisation" (PL en variables mixtes) et expérimentations.
- Diffère d'autres travaux où l'équité est définie "localement" dans un contexte multi-agents (contre vision "**globale**" ici)

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs définis en intention

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs définis en intention
- un arc est valué par un vecteur de $(\mathbb{R}^+)^n$ représentant le coût pour chacun des agents d'avoir cet arc dans la solution

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

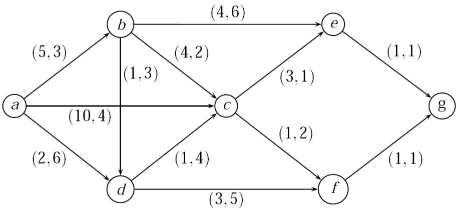
- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs définis en intention
- un arc est valué par un vecteur de $(\mathbb{R}^+)^n$ représentant le coût pour chacun des agents d'avoir cet arc dans la solution
- pour chaque agent, les coûts sont **exogènes et additifs**

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs définis en intention
- un arc est valué par un vecteur de $(\mathbb{R}^+)^n$ représentant le coût pour chacun des agents d'avoir cet arc dans la solution
- pour chaque agent, les coûts sont **exogènes et additifs**
- les coûts sont exprimés sur une échelle numérique commune.

Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs définis en intention
- un arc est valué par un vecteur de $(\mathbb{R}^+)^n$ représentant le coût pour chacun des agents d'avoir cet arc dans la solution
- pour chaque agent, les coûts sont **exogènes et additifs**
- les coûts sont exprimés sur une échelle numérique commune.



Fomalisme de l'équité

- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$

Fomalisme de l'équité

- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$
- vecteur pondéré correspondant : $(x_i)_{i=1...n}$

Fomalisme de l'équité

- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$
- vecteur pondéré correspondant : $(x_i)_{i=1 \dots n}$
- dominance de Pareto $\succsim_p$: $x \succsim_p y \Leftrightarrow \forall i,\ x_i \leq y_i$. Exemple : (9,9,0,0) $\succsim_p$ (10,10,10,10) en dépit de la disparité accrue.

Fomalisme de l'équité

- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$
- vecteur pondéré correspondant : $(x_i)_{i=1\ldots n}$
- dominance de Pareto $\succsim_P$: $x \succsim_P y \;\Leftrightarrow\; \forall i,\; x_i \leq y_i$. Exemple : (9,9,0,0) $\succsim_P$ (10,10,10,10) en dépit de la disparité accrue.
- *fonctions décumulatives* : $G_x(z) = \mu(\{i \mid x_i > z\})$ et $\forall p \in [0,1],\; \check{G}_x(p) = \inf\{z \geq 0 \mid G_x(z) \leq p\}$

Fomalisme de l'équité

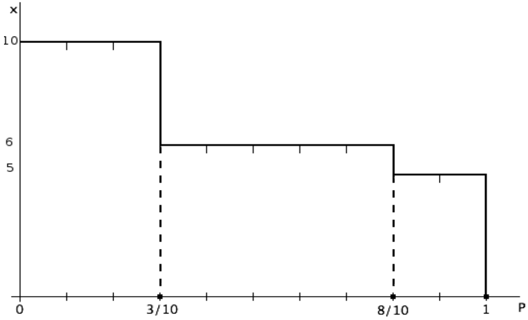
- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$
- vecteur pondéré correspondant : $(x_i)_{i=1\ldots n}$
- dominance de Pareto $\succsim_P$: $x \succsim_P y \;\Leftrightarrow\; \forall i,\; x_i \leq y_i$. Exemple : (9,9,0,0) $\succsim_P$ (10,10,10,10) en dépit de la disparité accrue.
- *fonctions décumulatives* : $G_x(z) = \mu(\{i \mid x_i > z\})$ et $\forall p \in [0,1],\; \check{G}_x(p) = \inf\{z \geq 0 \mid G_x(z) \leq p\}$
  $\rightarrow$ vision globale de la distribution de coûts sur les agents

Fomalisme de l'équité

- n agents, agent a_i de poids p_i, coût associé $x_i \geq 0$
- vecteur pondéré correspondant : $(x_i)_{i=1...n}$
- dominance de Pareto $\succsim_p$: $x \succsim_p y \;\Leftrightarrow\; \forall i,\; x_i \leq y_i$. Exemple : $(9{,}9{,}0{,}0) \succsim_p (10{,}10{,}10{,}10)$ en dépit de la disparité accrue.
- *fonctions décumulatives* : $G_x(z) = \mu(\{i \mid x_i > z\})$ et $\forall p \in [0,1],\; \check{G}_x(p) = \inf\{z \geq 0 \mid G_x(z) \leq p\}$
  $\rightarrow$ vision globale de la distribution de coûts sur les agents
- Hypothèse : $\check{G}$ **suffit à évaluer l'équité** (elle contient l'information nécessaire sur la distribution des coûts).

Illustration de la fonction $\check{G}$

Distribution de coûts de $(10, 6, 5)$ sur trois agents de poids respectifs $3/10$, $5/10$ et $2/10$:



Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$

Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$
(+ **P-Monotonie** et **Symétrie**)

Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$
(+ **P-Monotonie** et **Symétrie**)

Dominance de Lorenz (P-Monotonie, Symétrie, Principe transfert)

Les n composantes du vecteur de Lorenz de x sont définies par :
$L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ et la dominance de Lorenz est définie par :
$x \succsim_L y$ ssi $L(x) \succsim_P L(y)$.

Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$ (+ **P-Monotonie** et **Symétrie**)

Dominance de Lorenz (P-Monotonie, Symétrie, Principe transfert)

Les n composantes du vecteur de Lorenz de x sont définies par : $L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ et la dominance de Lorenz est définie par : $x \succsim_L y$ ssi $L(x) \succsim_P L(y)$.

Prop. (Shorrocks, 1983)

$L_k(x) = n \int_{p=0}^{\frac{k}{n}} \check{G}_x(p)dp$ *(donc L s'écrit en fonction de $\check{G}$).*

Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$
(+ **P-Monotonie** et **Symétrie**)

Dominance de Lorenz (P-Monotonie, Symétrie, Principe transfert)

Les n composantes du vecteur de Lorenz de x sont définies par : $L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ et la dominance de Lorenz est définie par :
$x \succsim_L y$ ssi $L(x) \succsim_P L(y)$.

Prop. (Shorrocks, 1983)

$L_k(x) = n \int_{p=0}^{\frac{k}{n}} \check{G}_x(p)dp$ *(donc L s'écrit en fonction de $\check{G}$).*

Exemple : $(10, 10) \succsim_L (5, 16)$ car $(10, 10) \succsim_L (5, 15) \succsim_P (5, 16)$

Cas non pondéré I : dominance de Lorenz

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$
(+ **P-Monotonie** et **Symétrie**)

Dominance de Lorenz (P-Monotonie, Symétrie, Principe transfert)

Les n composantes du vecteur de Lorenz de x sont définies par : $L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ et la dominance de Lorenz est définie par : $x \succsim_L y$ ssi $L(x) \succsim_P L(y)$.

Prop. (Shorrocks, 1983)

$L_k(x) = n \int_{p=0}^{\frac{k}{n}} \check{G}_x(p)dp$ *(donc L s'écrit en fonction de $\check{G}$).*

Exemple : $(10, 10) \succsim_L (5, 16)$ car $(10, 10) \succsim_L (5, 15) \succsim_P (5, 16)$
Inconvénients : peu discriminant, pas de compensation $\rightarrow$ OWA

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

- Jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0, 1]$

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

- Jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0, 1]$
- On notera désormais $(.)$ la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant.

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

- Jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0, 1]$
- On notera désormais (.) la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant.
- $\text{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

- Jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0, 1]$
- On notera désormais (.) la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant.
- $\mathrm{OWA}_w(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$
- Intérêt : pouvoir **pénaliser les coûts les plus élevés** avec des poids importants

Cas non pondéré II : critère OWA

Idée : *relaxation* des n inégalités de Lorenz (combinaison linéaire)

- Jeu de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$ tq $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0, 1]$
- On notera désormais (.) la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant.
- $$\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} (w_i - w_{i+1}) L_i(x)$$
- Intérêt : pouvoir **pénaliser les coûts les plus élevés** avec des poids importants
- Remarque : OWA = somme pondérée sur les composantes de Lorenz (donc OWA s'écrit en fonction de $\check{G}$).

OWA vs somme pondérée

Intérêt du critère OWA par rapport à la moyenne des coûts. Ici, recherche d'une permutation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & (4) & 9 & 7 \\ 1 & (3) & 2 & 7 & 8 \\ (3) & 9 & 2 & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 3 & (3) & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 7 & (3) \end{pmatrix}$$

OWA vs somme pondérée

Intérêt du critère OWA par rapport à la moyenne des coûts. Ici, recherche d'une permutation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & (4) & 9 & 7 \\ 1 & (3) & 2 & 7 & 8 \\ (3) & 9 & 2 & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 3 & (3) & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 7 & (3) \end{pmatrix}$$

- Optimiser la somme des coûts $\rightarrow 7, 1, 2, 3, 1$ de coût total 14, coûts mal répartis...

OWA vs somme pondérée

Intérêt du critère OWA par rapport à la moyenne des coûts. Ici, recherche d'une permutation de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & (4) & 9 & \color{red}{7} \\ \color{red}{1} & (3) & 2 & 7 & 8 \\ (3) & 9 & \color{red}{2} & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 3 & \color{red}{(3)} & 4 \\ 5 & \color{red}{1} & 7 & 7 & (3) \end{pmatrix}$$

- Optimiser la somme des coûts $\rightarrow$ $\color{red}{7, 1, 2, 3, 1}$ de coût total 14, coûts mal répartis...
- solution OWA-optimale $(4), (3), (3), (3), (3)$ de coût total 16 mais coûts mieux répartis ! Mais difficultés algorithmiques.

Cas non pondéré III : L $\longrightarrow$ OWA

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Neutralité. } \check{G}(x) = \check{G}(y) \Rightarrow x \sim y. \\ \textbf{Stricte L-monotonie. } L(x) \succ_P L(y) \Rightarrow x \succ y.\end{array}\right\} (\Gamma)$$

Cas non pondéré III : L $\longrightarrow$ OWA

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{Neutralité. } \check{G}(x) = \check{G}(y) \Rightarrow x \sim y. \\[1em]
\textbf{Stricte L-monotonie. } L(x) \succ_P L(y) \Rightarrow x \succ y. \\[3em]
\textbf{Pré-ordre total. } \succsim \text{ est réflexive, transitive et complète.} \\[1em]
\textbf{Continuité. } \text{Soient } L, M \text{ et } N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big) \text{ avec } L \succ M \succ N : \\
\exists\ (\alpha, \beta) \in\ ]0,1[\text{ tq : } \alpha L + (1-\alpha)N \succ M \succ \beta L + (1-\beta)N. \\[1em]
\textbf{Indépendance. } \text{Soient } L, M \text{ et } N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big) \text{ avec } L \succ M : \\
\forall\ \alpha \in\ ]0,1[\ : \alpha L + (1-\alpha)N \succ \alpha M + (1-\alpha)N.
\end{array}\right\} (\Gamma)$$

Cas non pondéré III : L $\longrightarrow$ OWA

$$\left.\begin{array}{l}
\textbf{Neutralité. } \check{G}(x) = \check{G}(y) \Rightarrow x \sim y. \\[1em]
\textbf{Stricte L-monotonie. } L(x) \succ_P L(y) \Rightarrow x \succ y. \\[3em]
\textbf{Pré-ordre total. } \succsim \text{ est réflexive, transitive et complète.} \\[1em]
\textbf{Continuité. } \text{Soient } L,\ M \text{ et } N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big) \text{ avec } L \succ M \succ N : \\
\exists\ (\alpha, \beta) \in\ ]0,1[\text{ tq} : \alpha L + (1-\alpha)N \succ M \succ \beta L + (1-\beta)N. \\[1em]
\textbf{Indépendance. } \text{Soient } L,\ M \text{ et } N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big) \text{ avec } L \succ M : \\
\forall\ \alpha \in\ ]0,1[: \alpha L + (1-\alpha)N \succ \alpha M + (1-\alpha)N.
\end{array}\right\} (\Gamma)$$

Perny & Spanjaard (2006)

Sous les axiomes (Γ), les préférences sont représentables par un critère **OWA équitable** (c-à-d $w' > 0$)

Le cas pondéré : SSD et Weighted-OWA

- On définit $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$

Le cas pondéré : SSD et Weighted-OWA

- On définit $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$
- $x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p)$.
  Second ordre Stochastic Dominance = Lorenz pondéré

Le cas pondéré : SSD et Weighted-OWA

- On définit $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$
- $x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p)$.
  Second ordre Stochastic Dominance = Lorenz pondéré
- Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et $w_i \in [0,1]$ et w^* tq $w^*(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k w_i$

Le cas pondéré : SSD et Weighted-OWA

- On définit $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$
- $x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p)$.
  Second ordre Stochastic Dominance = Lorenz pondéré
- Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et $w_i \in [0,1]$ et w^* tq $w^*(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k w_i$

$$\mathrm{WOWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n \left[w^* \left(\sum_{j=1}^i p_{(j)} \right) - w^* \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_{(j)} \right) \right] x_{(i)}.$$

Alors :

Le cas pondéré : SSD et Weighted-OWA

- On définit $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$
- $x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p)$.
  Second ordre Stochastic Dominance = Lorenz pondéré
- Soit $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et $w_i \in [0,1]$ et w^* tq $w^*(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k w_i$

$$\mathrm{WOWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n \left[w^* \left(\sum_{j=1}^i p_{(j)} \right) - w^* \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_{(j)} \right) \right] x_{(i)}.$$

Alors :

Pour des agents équipondérés, WOWA $\rightarrow$ OWA.
Donc : **WOWA = OWA pondéré**.

Duplication d'agents (poids additifs)

- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$

Duplication d'agents (poids additifs)

- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$
- Comme l'équité ne dépend que de $\check{G}$, on crée :

Duplication d'agents (poids additifs)

- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$
- Comme l'équité ne dépend que de $\check{G}$, on crée :
- p agents dupliqués de poids $\frac{1}{p}$, de vecteur coût $\tilde{x}$ tq $\check{G}_x = \check{G}_{\tilde{x}}$

Duplication d'agents (poids additifs)

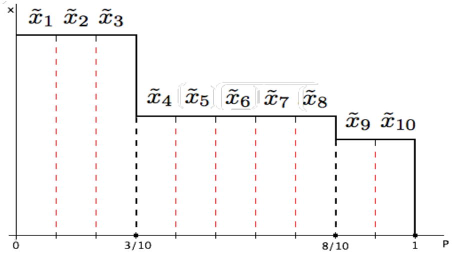
- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$
- Comme l'équité ne dépend que de $\check{G}$, on crée :
- p agents dupliqués de poids $\frac{1}{p}$, de vecteur coût $\tilde{x}$ tq $\check{G}_x = \check{G}_{\tilde{x}}$
- coût x_i de l'agent a_i attribué à un nombre d'agents dupliqués proportionnel au poids de a_i. En posant $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j$:

Duplication d'agents (poids additifs)

- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$
- Comme l'équité ne dépend que de $\check{G}$, on crée :
- p agents dupliqués de poids $\frac{1}{p}$, de vecteur coût $\tilde{x}$ tq $\check{G}_x = \check{G}_{\tilde{x}}$
- coût x_i de l'agent a_i attribué à un nombre d'agents dupliqués proportionnel au poids de a_i. En posant $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j$:
  $\forall i \in [1, n], \; \tilde{x}_{z_i+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_i+d_i} = x_i$.

Duplication d'agents (poids additifs)

- n agents de poids **additifs** (précision $1/p$) : $\frac{d_1}{p}, \ldots, \frac{d_n}{p}$
- Comme l'équité ne dépend que de $\check{G}$, on crée :
- p agents dupliqués de poids $\frac{1}{p}$, de vecteur coût $\tilde{x}$ tq $\check{G}_x = \check{G}_{\tilde{x}}$
- coût x_i de l'agent a_i attribué à un nombre d'agents dupliqués proportionnel au poids de a_i. En posant $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j$: $\forall i \in [1, n],\ \tilde{x}_{z_i+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_i+d_i} = x_i$.



Cas d'agents de poids additifs

La duplication nous permet de montrer que, dans le cas pondéré, l'équivalent du lien L $\longrightarrow$ OWA est :

Cas d'agents de poids additifs

La duplication nous permet de montrer que, dans le cas pondéré, l'équivalent du lien L $\longrightarrow$ OWA est :

SSD $\longrightarrow$ WOWA

Sous les axiomes (Γ), et dans le cas où les poids des agents sont additifs, les préférences sont représentables par un critère WOWA dont la fonction de déformation φ est strictement concave.

Cas d'agents de poids additifs

La duplication nous permet de montrer que, dans le cas pondéré, l'équivalent du lien L $\longrightarrow$ OWA est :

SSD $\longrightarrow$ WOWA

Sous les axiomes (Γ), et dans le cas où les poids des agents sont additifs, les préférences sont représentables par un critère WOWA dont la fonction de déformation φ est strictement concave.

WOWA équitable

Un critère WOWA est équitable lorsque son jeu de poids est équitable (strictement décroissant et strictement positif), ce qui correspond à une fonction de déformation strictement concave.

Récapitulatif

LORENZ

Récapitulatif

$$\text{LORENZ} \xrightarrow{\textit{prolongement } (\Gamma)} \text{OWA}$$

Récapitulatif

$$
\begin{tikzcd}
\textsc{Lorenz} \arrow[r, "\textit{prolongement } (\Gamma)"] \arrow[d, "\textit{pondération des agents}"] & \mathsf{OWA} \\
\mathsf{SSD} &
\end{tikzcd}
$$

Récapitulatif

prolongement (Γ)

$$\begin{array}{ccc} \text{Lorenz} & \longrightarrow & \text{OWA} \\ \downarrow & \textit{pondération des agents} & \downarrow \\ \text{SSD} & & \text{WOWA} \end{array}$$

Récapitulatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\textsc{Lorenz} \arrow[r, "\textit{prolongement } (\Gamma)"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\textit{pondération des agents}"] & \text{OWA} \arrow[d] \\
\text{SSD} \arrow[r, "\textit{prolongement } (\Gamma)"'] & \text{WOWA}
\end{tikzcd}$$

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.
- "Somme pondérée" d'une infinité d'inégalités : intégrale !

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.
- "Somme pondérée" d'une infinité d'inégalités : intégrale !
- $\forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p)$ devient, pour $\lambda > 0$:

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.
- "Somme pondérée" d'une infinité d'inégalités : intégrale !
- $\forall p \in [0,1], \check{G}^2_x(p) \leq \check{G}^2_y(p)$ devient, pour $\lambda > 0$: $\int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_x(p)dp \leq \int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_y(p)dp$.

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.
- "Somme pondérée" d'une infinité d'inégalités : intégrale !
- $\forall p \in [0,1], \check{G}^2_x(p) \leq \check{G}^2_y(p)$ devient, pour $\lambda > 0$: $\int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_x(p)dp \leq \int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_y(p)dp$.

Prolongement de SSD

Sous les axiomes (Γ), les préfèrences sont représentables par le critère à minimiser : $\int_{t=0}^{1} \Psi(t)\check{G}(t)dt$ avec Ψ fonction strictement décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $\Psi(0) = 1$ et $\Psi(1) = 0$.

Généralisation du prolongement de SSD en un critère total

- Axiomes de vNM : introduisent de la **compensation** (cf fonction d'utilité linéaire)
- Conséquences de ces axiomes sur SSD : relaxer l'infinité d'inégalités de la dominance fonctionnelle sur $\check{G}^2$.
- "Somme pondérée" d'une infinité d'inégalités : intégrale !
- $\forall p \in [0,1], \check{G}^2_x(p) \leq \check{G}^2_y(p)$ devient, pour $\lambda > 0$: $\int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_x(p)dp \leq \int_{p=0}^{1} \lambda(p)\check{G}^2_y(p)dp$.

Prolongement de SSD

Sous les axiomes (Γ), les préfèrences sont représentables par le critère à minimiser : $\int_{t=0}^{1} \Psi(t)\check{G}(t)dt$ avec Ψ fonction strictement décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$ vérifiant $\Psi(0) = 1$ et $\Psi(1) = 0$.

On retrouve WOWA sous l'hypothèse de poids additifs

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto $\longrightarrow$ on s'intéresse à l'**itération de la dominance de Lorenz** !

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto $\rightarrow$ on s'intéresse à l'**itération de la dominance de Lorenz** !
- Exemple d'itération : $u = (20, 2, 10)$ et $v = (11, 12, 13)$

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto → on s'intéresse à l'**itération de la dominance de Lorenz** !
- Exemple d'itération : $u = (20, 2, 10)$ et $v = (11, 12, 13)$
  - $L(u) = (20, 30, 32)$, $L^2(u) = (32, 62, 82)$, et $L^3(u) = (82, 144, 176)$

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto $\rightarrow$ on s'intéresse à l'**itération de la dominance de Lorenz** !
- Exemple d'itération : $u = (20, 2, 10)$ et $v = (11, 12, 13)$
  - $L(u) = (20, 30, 32)$, $L^2(u) = (32, 62, 82)$, et $L^3(u) = (82, 144, 176)$
  - $L(v) = (13, 25, 36)$, $L^2(v) = (36, 61, 74)$, et $L^3(v) = (74, 135, 171)$

Itérer la dominance de Lorenz

- Itération : procédé naturel, déjà proposé en économie (SD_n)
- Lorenz pas très discriminant
- Lorenz raffine la dominance de Pareto $\longrightarrow$ on s'intéresse à l'**itération de la dominance de Lorenz** !
- Exemple d'itération : $u = (20, 2, 10)$ et $v = (11, 12, 13)$
  - $L(u) = (20, 30, 32)$, $L^2(u) = (32, 62, 82)$, et $L^3(u) = (82, 144, 176)$
  - $L(v) = (13, 25, 36)$, $L^2(v) = (36, 61, 74)$, et $L^3(v) = (74, 135, 171)$
- Résultat surprenant et intéressant : l'itération de la dominance de Lorenz en minimisation converge vers un OWA équitable !

Écriture matricielle et itération

$$\text{Soit } L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & 1 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Écriture matricielle et itération

$$\text{Soit } L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & 1 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Itérer Lorenz équivaut à calculer les puissances de la matrice L

$\forall\ k \in \mathbb{N},\ L^{(k)}(x) = L^k.x \quad$ *(pour x à composantes croissantes)*

Écriture matricielle et itération

$$\text{Soit } L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & 1 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Itérer Lorenz équivaut à calculer les puissances de la matrice L

$\forall\ k \in \mathbb{N},\ L^{(k)}(x) = L^k.x \quad$ *(pour x à composantes croissantes)*

Suite d'ordres emboîtés $\succsim_{L^{(k)}}$ définis par :

$$x \succsim_{L^{(k)}} y \ \Leftrightarrow\ L^{(k)}(x) \succsim_P L^{(k)}(y)$$

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$.

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{array}{c} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{array}$.

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{matrix} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{matrix}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{matrix} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{matrix}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.

Idée de la convergence : pour k grand, ces n ordres deviennent équivalents entre eux...

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{matrix} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{matrix}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.

Idée de la convergence : pour k grand, ces n ordres deviennent équivalents entre eux... et en plus convergent à l'infini vers un ordre

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{array}{c} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{array}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.
Idée de la convergence : pour k grand, ces n ordres deviennent équivalents entre eux... et en plus convergent à l'infini vers un ordre que l'on peut exprimer en diagonalisant L.

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{matrix} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{matrix}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.

Idée de la convergence : pour k grand, ces n ordres deviennent équivalents entre eux... et en plus convergent à l'infini vers un ordre que l'on peut exprimer en diagonalisant L.

Proposition : convergence vers un OWA

En posant $w = \frac{\pi}{2n+1}$, l'itération de Lorenz converge vers un OWA équitable de poids : $(\sin(kw))_{k=1\ldots n}$

Convergence vers un OWA

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{array}{c} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{array}$.

Dominance d'ordre k : intersection de n ordres.
Idée de la convergence : pour k grand, ces n ordres deviennent équivalents entre eux... et en plus convergent à l'infini vers un ordre que l'on peut exprimer en diagonalisant L.

Proposition : convergence vers un OWA

En posant $w = \frac{\pi}{2n+1}$, l'itération de Lorenz converge vers un OWA équitable de poids : $(\sin(kw))_{k=1\ldots n}$

Démonstration : algèbre linéaire + interprétations décisionnelles.

Propriétés intéressantes

Ce résultat n'est pas valable si l'on itère

Propriétés intéressantes

Ce résultat n'est pas valable si l'on itère la dominance stochastique (cela a déjà été proposé),

Propriétés intéressantes

Ce résultat n'est pas valable si l'on itère la dominance stochastique (cela a déjà été proposé), ou la dominance de Lorenz en maximisation.

Propriétés intéressantes

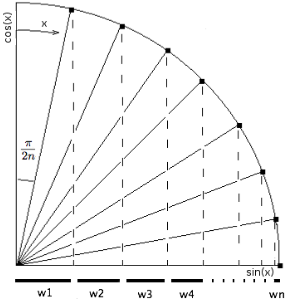
Ce résultat n'est pas valable si l'on itère la dominance stochastique (cela a déjà été proposé), ou la dominance de Lorenz en maximisation. $\longrightarrow$ spécificité de Lorenz en minimisation !

Propriétés intéressantes

Ce résultat n'est pas valable si l'on itère la dominance stochastique (cela a déjà été proposé), ou la dominance de Lorenz en maximisation. $\longrightarrow$ spécificité de Lorenz en minimisation !
Pertinence de ce modèle en économie ?

Propriétés intéressantes

Ce résultat n'est pas valable si l'on itère la dominance stochastique (cela a déjà été proposé), ou la dominance de Lorenz en maximisation. $\longrightarrow$ spécificité de Lorenz en minimisation !
Pertinence de ce modèle en économie ?



Interprétation graphique de l'équité du jeu de poids :

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.
- recherche d'une affectation satisfaisant chacun des agents

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.
- recherche d'une affectation satisfaisant chacun des agents
- Si $C_{ij} = (0, \ldots, 0, c_{ij}, 0, \ldots 0)$ *(où c_{ij} est en position j)*, modélisation par un **PL multi-objectifs** en variables 0-1 :

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.
- recherche d'une affectation satisfaisant chacun des agents
- Si $C_{ij} = (0, \ldots, 0, c_{ij}, 0, \ldots 0)$ *(où c_{ij} est en position j)*, modélisation par un **PL multi-objectifs** en variables 0-1 :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \ldots n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \ldots n \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.
- recherche d'une affectation satisfaisant chacun des agents
- Si $C_{ij} = (0, \ldots, 0, c_{ij}, 0, \ldots 0)$ *(où c_{ij} est en position j)*, modélisation par un **PL multi-objectifs** en variables 0-1 :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \ldots n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \ldots n \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Propriété (White, 1984)

Pour ce problème, toute solution Pareto-optimale minimise une somme pondérée positive des coûts des n agents.

Affectation équitable

- n objets à affecter à n agents
- coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j : c_{ij}.
- recherche d'une affectation satisfaisant chacun des agents
- Si $C_{ij} = (0, \dots, 0, c_{ij}, 0, \dots 0)$ *(où c_{ij} est en position j)*, modélisation par un **PL multi-objectifs** en variables 0-1 :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \dots n, j = 1 \dots n
\end{array}
$$

Propriété (White, 1984)

Pour ce problème, toute solution Pareto-optimale minimise une somme pondérée positive des coûts des n agents.

Comment trouver une affectation OWA ou WOWA-optimale ?

Composantes de Lorenz en PL

- OWA équitable $(w_1, \ldots, w_n)$. On a $w' = (w_1 - w_2, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n) > 0$ et $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$.

Composantes de Lorenz en PL

- OWA équitable $(w_1, \ldots, w_n)$. On a $w' = (w_1 - w_2, \ldots, \; w_{n-1} - w_n, \; w_n) > 0$ et $\text{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^n w'_i L_i(x)$.
- Or, on peut obtenir la kième composante de Lorenz de y par le PL suivant :

Composantes de Lorenz en PL

- OWA équitable $(w_1, \ldots, w_n)$. On a $w' = (w_1 - w_2, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n) > 0$ et $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^n w'_i L_i(x)$.
- Or, on peut obtenir la kième composante de Lorenz de y par le PL suivant :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Max} \sum_{i=1}^n \alpha_i^k y_i & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^k = k & \\ 0 \leq \alpha_i^k \leq 1 & \qquad i = 1 \ldots n \end{array}$$

Composantes de Lorenz en PL

- OWA équitable $(w_1, \ldots, w_n)$. On a $w' = (w_1 - w_2, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n) > 0$ et $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^n w'_i L_i(x)$.
- Or, on peut obtenir la kième composante de Lorenz de y par le PL suivant ou par son dual :

$$\begin{array}{ll} \text{Max } \sum_{i=1}^n \alpha_i^k y_i & \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^k = k & \\ 0 \leq \alpha_i^k \leq 1 & i = 1 \ldots n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min } k r_k + \sum_{i=1}^n b_i^k & \\ r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \ldots n \\ b_i^k \geq 0 & i = 1 \ldots n \end{array}$$

Linéarisation d'un OWA équitable

- Comme $w' > 0$, pour minimiser la fonction objectif $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$ aura avantage à minimiser les L_k.

Linéarisation d'un OWA équitable

- Comme $w' > 0$, pour minimiser la fonction objectif $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i' L_i(x)$ aura avantage à minimiser les L_k.
- Minimiser l'OWA s'écrit donc :

Linéarisation d'un OWA équitable

- Comme $w' > 0$, pour minimiser la fonction objectif $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$ aura avantage à minimiser les L_k.
- Minimiser l'OWA s'écrit donc :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \left(k r_k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \right) & \\ r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n \\ b_i^k \geq 0 & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n \end{array}$$

Linéarisation d'un OWA équitable

- Comme $w' > 0$, pour minimiser la fonction objectif $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$ aura avantage à minimiser les L_k.
- Minimiser l'OWA s'écrit donc :

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \left(k r_k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \right) & \\
r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n \\
b_i^k \geq 0 & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n
\end{array}$$

$\rightarrow$ Le critère OWA équitable s'exprime comme la solution d'un PL (résultat d'Ogryczak).

Linéarisation d'un OWA équitable

- Comme $w' > 0$, pour minimiser la fonction objectif $\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$ aura avantage à minimiser les L_k.
- Minimiser l'OWA s'écrit donc :

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \left(k r_k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \right) & \\
r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n \\
b_i^k \geq 0 & i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n
\end{array}
$$

  $\rightarrow$ Le critère OWA équitable s'exprime comme la solution d'un PL (résultat d'Ogryczak).
- La duplication nous permet de linéariser directement WOWA !

Recherche d'une affectation (W)OWA-optimale

Linéarisation de la recherche d'affectations OWA_{eq}-optimale

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
\text{Min } \sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k r_k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \right) & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\
r_k + b_j^k \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \\
b_j^k \geq 0 & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \\
\hline
\end{array}
$$

n^2 variables booléennes, $n^2 + n$ variables réelles et $2n^2 + 2n$ contraintes.

Recherche d'une affectation (W)OWA-optimale

Linéarisation de la recherche d'affectations
WOWA_{eq}-optimale (poids des agents en d_i/p)

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w'_k \left(k r_k + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_i b_i^k \right) & \\
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\
r_k + b_j^k \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots \ p \\
b_j^k \geq 0 & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots \ p \\
x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n
\end{array}
$$

n^2 variables booléennes, $np + n$ variables réelles et
$2np + 2n$ contraintes.

Résultats numériques 1/2

n =	10	20	30	40	50	60	70	80	90
t (OWA)	.04	.38	1.45	3.12	5.13	14.7	73.8	122	275
t (WOWA)	.15	1.70	10.8	47.4	77.2	320	-	-	-

TAB 1 – Recherche d'une affectation équitable, coûts dans $[\![1;1000]\!]$

Résultats numériques 1/2

n =	10	20	30	40	50	60	70	80	90
t (OWA)	.04	.38	1.45	3.12	5.13	14.7	73.8	122	275
t (WOWA)	.15	1.70	10.8	47.4	77.2	320	-	-	-

TAB 1 – Recherche d'une affectation équitable, coûts dans $[\![1;1000]\!]$

n =	100	200	300	400	500	600	700	800	900
t (OWA)	.98	2.37	10.6	23.0	32.4	57.7	84.5	158	227
t (WOWA)	11.4	52.4	197	-	-	-	-	-	-

TAB 2 – Recherche d'une affectation équitable, coûts dans $[\![1;20]\!]$

Résultats numériques 2/2

n =	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
t (1%)	0.02	0.31	1.04	3.52	5.93	15	46	66	184	381

TAB 3 – Mise en relation équitable pour le critère OWA, coûts dans $[\![1;20]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

Résultats numériques 2/2

n =	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
t (1%)	0.02	0.31	1.04	3.52	5.93	15	46	66	184	381
t (0.01%)	0.17	1.32	25	239	-	-	-	-	-	-

TAB 3 – Mise en relation équitable pour le critère OWA, coûts dans $[\![1;20]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

Résultats numériques 2/2

n =	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
t (1%)	0.02	0.31	1.04	3.52	5.93	15	46	66	184	381
t (0.01%)	0.17	1.32	25	239	-	-	-	-	-	-

TAB 3 – Mise en relation équitable pour le critère OWA, coûts dans $[\![1;20]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

n =	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100
t	.23	1.58	4.8	10	20	37	57	93	151	222	361

TAB 4 – Paper Assignment Problem pour le critère OWA, coûts dans $[\![1;5]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

Commentaires

- Possible de résoudre "rapidement" le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). $\longrightarrow$ très performant

Commentaires

- Possible de résoudre "rapidement" le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). → très performant
- Limites de la génération aléatoire. Traiter de vraies données ?

Commentaires

- Possible de résoudre "rapidement" le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). $\longrightarrow$ très performant
- Limites de la génération aléatoire. Traiter de vraies données ?
- Temps de résolution varient selon :

Commentaires

- Possible de résoudre “rapidement” le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). → très performant
- Limites de la génération aléatoire. Traiter de vraies données ?
- Temps de résolution varient selon :
  - le nombre d'agents considérés et le critère choisi

Commentaires

- Possible de résoudre "rapidement" le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). $\longrightarrow$ très performant
- Limites de la génération aléatoire. Traiter de vraies données ?
- Temps de résolution varient selon :
    - le nombre d'agents considérés et le critère choisi
    - l'intervalle de génération des coûts et la densité de la matrice des coûts

Commentaires

- Possible de résoudre "rapidement" le Paper Assignment Problem avec plus de 1000 agents (plusieurs millions de variables et de contraintes !). $\rightarrow$ très performant
- Limites de la génération aléatoire. Traiter de vraies données ?
- Temps de résolution varient selon :
  - le nombre d'agents considérés et le critère choisi
  - l'intervalle de génération des coûts et la densité de la matrice des coûts
  - la nature des contraintes d'affectation (*Paper Assignment Problem* beaucoup plus rapide que mise en relation).

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?
- Sur le plan pratique, deux pistes intéressantes : approximer le front de Pareto puis générer une solution équitable approchée, ou utiliser la proposition de White pour obtenir des bornes dans un B&B.

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?
- Sur le plan pratique, deux pistes intéressantes : approximer le front de Pareto puis générer une solution équitable approchée, ou utiliser la proposition de White pour obtenir des bornes dans un B&B.
- Application de ce travail à d'autres problèmes (et comparaison avec d'autres approches de l'équipe Décision)

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?
- Sur le plan pratique, deux pistes intéressantes : approximer le front de Pareto puis générer une solution équitable approchée, ou utiliser la proposition de White pour obtenir des bornes dans un B&B.
- Application de ce travail à d'autres problèmes (et comparaison avec d'autres approches de l'équipe Décision)
    - les flots (et donc les chemins) multicritères

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?
- Sur le plan pratique, deux pistes intéressantes : approximer le front de Pareto puis générer une solution équitable approchée, ou utiliser la proposition de White pour obtenir des bornes dans un B&B.
- Application de ce travail à d'autres problèmes (et comparaison avec d'autres approches de l'équipe Décision)
    - les flots (et donc les chemins) multicritères
    - l'arbre couvrant multicritère (Perny & Spanjaard)

Conclusion

Etude théorique de l'optimisation comb. équitable. Approche par PL féconde. Perspectives de recherche très nombreuses :

- Du point de vue théorique : axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini, montrer le caractère NP-difficile de l'affectation OWA-optimal ?
- Sur le plan pratique, deux pistes intéressantes : approximer le front de Pareto puis générer une solution équitable approchée, ou utiliser la proposition de White pour obtenir des bornes dans un B&B.
- Application de ce travail à d'autres problèmes (et comparaison avec d'autres approches de l'équipe Décision)
  - les flots (et donc les chemins) multicritères
  - l'arbre couvrant multicritère (Perny & Spanjaard)
  - l'arbre couvrant monocritère

Annexe : résultats numériques pour l'affectation multicritère

Coûts tirés dans $[\![1;100]\!]$ et matrices pleines. Critère OWA.

n =	100	200	300	400	500
t (sec)	4.5	23	70	202	-

TAB 5 – Affectation avec **5** critères

n =	80	90	100	110
t (sec)	101	212	405	-

TAB 6 – Affectation avec **10** critères

n =	20	30	40	50	60
t (sec)	7.6	37	183	531	-

TAB 7 – Affectation avec **20** critères