Modèles pour la recherche de solutions équitables dans les problèmes d'optimisation combinatoire et application aux problèmes d'affectation multi–agents

Boris Golden

Encadrant : Patrice Perny

* * *

Stage de Master 2 d'Informatique (spécialité IAD)
de avril à septembre 2008

* * *

Résumé

La recherche de solutions équitables en optimisation combinatoire consiste à trouver, parmi un ensemble de solutions défini en intention dans un problème multi-agents, une solution minimisant un critère d'équité prenant en compte l'importance de chaque agent. Nous présentons tout d'abord un formalisme de l'équité et une modélisation des problèmes multi-agents sous la forme de graphes multivalués. Nous introduisons ensuite la version pondérée de la dominance de Lorenz et la prolongeons en un critère total WOWA, puis établissons les propriétés de différentes familles de critères équitables. Nous proposons enfin un critère d'équité WOWA particulier, que nous utilisons pour résoudre différents problèmes d'affectation équitable multi-agents, modélisés sous forme de programmes linéaires en variables mixtes.

LIP6 - Université Paris VI

Table des matières

Introduction

L'*équité* désigne le souci de partager de façon juste des ressources, en prenant en compte le "mérite" de chaque individu (contrairement à l'*égalité*). En économie, de nombreux modèles en ont été proposés [1] : dominance de Lorenz, indices de Gini, indices d'Atkinson, etc. Cependant, dans le contexte d'une utilisation en informatique, l'acceptabilité d'un critère d'équité ne s'évalue pas uniquement sur ses capacités à discriminer suffisamment et de façon pertinente : la complexité algorithmique est un facteur clef.

Dans le cadre de l'optimisation combinatoire, où la recherche d'une solution optimale se fait parmi un ensemble exponentiel de solutions définies en intention (typiquement, un chemin entre deux sommets dans un graphe), il est primordial que la complexité algorithmique soit raisonnable, pour éviter des temps de résolution exponentiels pour toute instance non triviale ; en effet, le nombre de solutions ne nous permet plus d'appliquer le critère sur chacune d'elle et de déterminer ensuite la meilleure. Il faut alors proposer pour chaque critère des méthodes (s'appuyant sur la décomposition en sous-solutions ou sur une formulation en programmation linéaire) qui permettent de mener à bien l'optimisation sans devoir énumérer l'ensemble des solutions.

L'objectif de ce travail est de fournir un cadre théorique (modèles et critères de décision) satisfaisant pour l'optimisation combinatoire équitable, dans la continuité de certains travaux de Perny & Spanjaard [2, 3] puis de proposer des applications algorithmiques sur des problèmes d'affectation équitable. La modélisation présentée dans ce travail se démarque de la littérature existant en économie sur le thème de l'équité [4, 5] par la finalité algorithmique (qui modifie fortement la vision du problème), et propose une approche qui diffère d'autres travaux définissant l'équité de façon locale dans un contexte multi-agents [6, 7].

Dans la première partie, nous proposons une vue d'ensemble de l'équité pour les problèmes d'optimisation combinatoire multi-agents, modélisés sous la forme de graphes à coûts vectoriels additifs. Après avoir présenté l'équité et son formalisme en économie, nous nous intéressons au cas particulier d'agents non pondérés et à la relation existant entre la dominance de Lorenz et le critère Ordered Weighted Average (OWA), avant de présenter le pendant de ces critères dans le cas pondéré.

En deuxième partie, nous montrons que le critère Weighted-OWA (WOWA), ou critère de Yaari, prolonge la dominance stochastique d'ordre 2 (SSD). Nous généralisons ensuite ce résultat dans le cadre de l'axiomatique de von Neumann & Morgenstern (vNM) en interprétant WOWA comme une somme pondérée dans un espace vectoriel bien choisi, et prouvons que, dans le cas où les poids des agents ne sont plus supposés additifs, SSD se prolonge en une intégrale de Choquet.

La troisième partie est consacrée à un critère WOWA équitable particulier issu de l'itération de la dominance de Lorenz, dans le but de proposer un jeu de poids par défaut lorsque l'élicitation des préférences n'est pas envisageable. Après avoir expliqué les raisons qui nous incitent à utiliser ce mécanisme de construction, nous déterminons le critère OWA limite ainsi obtenu dans le cas non pondéré, avant d'étendre ce résultat au cas pondéré et d'obtenir un critère WOWA aux propriétés très satisfaisantes.

Enfin, la dernière partie est consacrée aux problèmes d'affectation équitable, modélisés par des programmes linéaires multi-objectifs en variables 0-1. Nous linéarisons les critères OWA et WOWA équitables, ce qui nous permet d'exprimer la recherche d'affectations OWA et WOWA optimales sous la forme d'un programme linéaire en variables mixtes. Nous modélisons deux problèmes réels par la recherche d'une affectation équitable multi-agents et testons les performances de résolution de notre formulation sur ces problèmes.

1 Équité et problèmes d'optimisation multi-agents

1.1 Définition de l'équité

L'équité est un concept pluridisciplinaire aux définitions multiples (cf annexe A). Nous retiendrons dans le cadre de ce travail une définition générique de l'équité parfaitement adaptée à nos besoins : *aspiration à attribuer de façon juste à chaque individu un traitement en adéquation avec son mérite.* L'interprétation de l'équite comme une "égalité pondérée" (par le philosophe John Rawls) est fondamentale et permettra de mieux comprendre certaines techniques comme la duplication d'agents (introduite en 2.1).

Il est fondamental de préciser que cette définition de l'équité est "globale" (à l'échelle du groupe) et rationnelle ; elle exclue en particulier la prise en compte de critères "locaux" (à l'échelle de l'agent) comme l'envie [6], le sentiment d'injustice vis-à-vis d'autres agents, ou encore la possibilité d'échanger des ressources ou de négocier entre agents [7].

Cette définition de l'équité est similaire à l'approche de la *robustesse* développée par Perny & Spanjaard [2], qui consiste à rechercher une solution qui reste satisfaisante quel que soit le scénario qui se produise (dans un problème où une solution a des coûts variant en fonction de différents scénarios envisageables). Malgré cette analogie apparente, on ne peut pas transposer à l'équité les modèles développés en robustesse pour deux raisons :

- le nombre de variables considérées (de l'ordre d'une dizaine en robustesse, plusieurs centaines ou milliers en équité) : du coup, la dominance de Lorenz ou le Minimax ne sont absolument pas discriminants et ne sont donc plus pertinents
- le caractère pondéré en équité : les agents n'ont en général pas la même importance et ne jouent donc pas de rôles symétriques.

L'équité induit l'idée de *répartir au mieux les coûts* entre tous les agents en prenant en compte leurs pondération ; dans le cas non pondéré, cela se traduit généralement par le *principe de transfert* (en 1.3). Cependant, l'équité n'est pas toujours la notion la plus pertinente lorsque l'on souhaite répartir des coûts sur des agents. Prenons l'exemple d'une entreprise qui a quatre clients, de même importance, dont elle veut minimiser le mécontentement sur une échelle de 10, les clients ayant un mécontentement de 3 ou plus risquant d'aller voir ailleurs. Entre un mécontentement de 7 pour le premier client et 1 pour les trois autres, ce que l'on note par le vecteur (7,1,1,1), et un mécontentement de (3,3,3,1), la seconde configuration est plus équitable (elle assure une meilleure répartition du même coût total). Mais l'entreprise préférera perdre un client et en satisfaire trois, plutôt que de prendre le risque d'en perdre trois (elle concentre donc les coûts sur un agent "poubelle").

Ce cas de figure illustre bien la nuance existant entre l'équité et vouloir répartir les coûts de façon satisfaisante : l'équité réfute par exemple la possibilité de sacrifier un ou plusieurs agents pour satisfaire les autres. L'analogie avec la décision dans le risque est claire : il peut être intéressant de concentrer tous les coûts sur un unique scénario, mais cela représente une prise de risque très élevée. L'équité est donc le pendant en décision collective de l'aversion au risque en décision dans l'incertain, et de la recherche de compromis équilibrés en décision multicritère (lorsque ces critères sont exprimés sur une échelle numérique commune).

1.2 Formalisme de l'équité et modélisation multi-agents

Pour proposer une formalisation de l'équité aussi générique que possible, nous introduisons maintenant un formalisme indépendant des problèmes multi-agents que nous traitons. Nous faisons l'hypothèse peu restrictive d'évaluer des *vecteurs pondérés*, formellement identifiables aux actes au sens de Savage [8] (exprimés sur des agents pondérés au lieu de conséquences probabilisées). Dans le contexte de n agents, l'agent a_i de poids p_i ayant un coût réel positif x_i, le vecteur pondéré associé est $(x_i)_{i=1\dots n}$ (le jeu de poids est implicite) et le vecteur pondéré est donc l'association d'un vecteur de coûts et d'un jeu de poids implicite fixé, qui sera utilisé pour évaluer l'équité d'une solution.

Une première idée pour comparer deux vecteurs pondérés est d'utiliser la dominance de Pareto : en effet, même si les coûts sont mieux répartis dans le vecteur (10,10,10,10) que dans le vecteur (9,9,0,0), la deuxième solution sera jugée plus équitable, car elle présente des coûts meilleurs pour l'ensemble des agents. C'est ici que l'on comprend l'importance d'avoir précédemment fait l'hypothèse que l'on jugeait l'équité d'une solution à l'échelle du groupe et non de l'agent (les deux derniers agents pourraient tout à fait vouloir être à égalité avec les autres et préférer par égoïsme la première solution pour ne pas se sentir lésés). Cette préférence pour une situation qui améliore (au sens large) la situation de tous les agents (quitte à accentuer les disparités) est appelé dominance de Pareto et induit un ordre partiel noté $\succsim_p$ que l'on définit par : $x \succsim_p y \;\Leftrightarrow\; \forall i,\; x_i \leq y_i$.

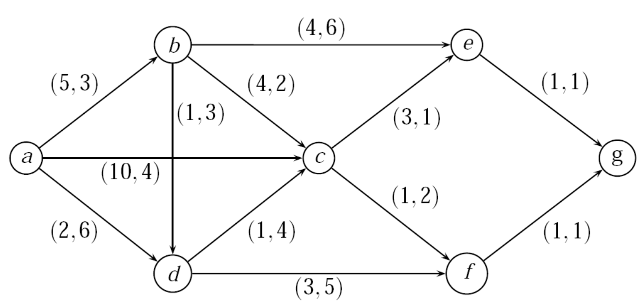
Une deuxième idée est d'associer à tout vecteur pondéré x une *fonction décumulative* $G_x(z)$ qui indique le poids de la coalition formée par les agents dont le coût est au dessus du seuil z. En notant μ la capacité qui donne le poids d'un sous-ensemble d'indices d'agents, on a : $G_x(z) = \mu(\{i \mid x_i > z\})$. On définit également la fonction réciproque de G_x, notée $\check{G}_x$, qui s'écrit : pour $p \in [0,1]$, $\check{G}_x(p) = \inf\{z \geq 0 \mid G_x(z) \leq p\}$, et qui s'interprête comme le coût minimal z tel qu'une coalition de poids au plus p ait un coût supérieur à z. Ces fonctions sont en escalier car nous travaillons dans un contexte discret. Leur avantage est de s'intéresser aux performances globales du groupe plutôt qu'à celles des agents.

La dominance fonctionnelle sur ces fonctions décumulatives (appelée *dominance stochastique* dans un contexte probabiliste), notée $\succsim_{SD}$, enrichit la dominance de Pareto et est donc plus discriminante que cette dernière. Elle a aussi l'avantage de considérer le groupe dans son ensemble et non pas chaque agent individuellement. On la définit par : $x \succsim_{SD} y \;\Leftrightarrow\; G_x \leq G_y$. La notion d'équité proprement dite n'intervient pas directement dans la SD. nous présenterons en 1.3 et 1.4 des critères discriminants modélisant l'équité.

Contrairement à l'économie, où l'usage est de maximiser des gains, nous nous intéressons à minimiser des coûts. Nous ferons la même hypothèse fondamentale qu'en économie dans l'étude de l'inégalité des revenus [9] : *la distribution de coûts dans un groupe est synthétisée par la fonction décumulative des coûts des agents qui composent ce groupe*, et les critères d'équité que nous allons présenter s'expriment donc uniquement en fonction de $\check{G}_x$ (et de paramètres fixés des modèles). L'intérêt porté à $\check{G}_x$ (ou *courbe de Lorenz*) se justifie par le *caractère macroscopique* de l'équité qui considère le groupe dans son ensemble plutôt que les agents. Les critères pour comparer l'équite de fonctions $\check{G}_x$ peuvent, dans notre contexte discret, être directement exprimés sur les vecteurs pondérés : cette transposition donne lieu à plusieurs écritures équivalentes de chaque critère, et à des résultats remarquables (en 3).

Les problèmes d'optimisation combinatoire multi-agents que nous étudions et surlequels nous souhaitons pouvoir appliquer nos critères d'équité sont modélisés ainsi :
- n agents pondérés
- un graphe orienté $\mathcal{G}$
- un problème d'optimisation sur $\mathcal{G}$ dont les solutions sont des ensembles d'arcs
- un arc est valué par un vecteur de $(\mathbb{R}^+)^n$ représentant le coût pour chacun des agents
- pour chaque agent, les coûts sur les arcs sont exogènes et additifs
- les coûts sont exprimés sur une échelle commune entre les agents.

Nous discutons du choix de cette modélisation en annexe B. Cette famille de modèles est riche et permet de modéliser la plupart des problèmes courants. Voici l'exemple de la recherche d'un chemin équitable pour un couple d'agents qui veulent aller de a à g : la valuation de chaque arc correspond ici au couple des temps mis par chaque agent pour parcourir cet arc. $a \to b \to e \to g$ de coût $(10, 10)$ est une solution équitable pour les deux agents, alors que $a \to d \to f \to g$ de coût $(6, 12)$ optimise la somme des coûts.



1.3 Le cas non pondéré : dominance de Lorenz et critère OWA

Nous nous intéressons en premier lieu au cas d'agents non pondérés. Le but est d'enrichir la dominance stochastique avec une idée d'équité (qui se confond dans ce cas avec l'égalité). Nous allons donc formaliser cette notion de répartition des coûts et introduire un critère d'équité classique dans le cas non pondéré : la dominance de Lorenz.

Nous définissons trois propriétés d'une relation de préférence $\succsim$:

P-monotonie. $x \succsim_p y \Rightarrow x \succsim y$ et $x \succ_p y \Rightarrow x \succ y$

Principe de transfert. Soit x tel que $x_i > x_j$ et ε tel que $0 \leq \varepsilon \leq x_i - x_j$. Alors : $x - \varepsilon e_i + \varepsilon e_j \succsim x$ *(avec e_k vecteur dont la seule composante non nulle k vaut 1)*

Symétrie. Pour toute permutation σ, on a $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \sim (x_1, \ldots, x_n)$

La P-monotonie exprime la préférence pour une situation plus favorable à tous les agents, le principe de transfert traduit le souhait de répartir les coûts équitablement entre les agents, et la symétrie donne des rôles symétriques aux agents, leurs coûts étant donc interchangeables (cette hypothèse est celle faite par SD dans le cas non pondéré). Ce jeu d'axiomes contient donc la dominance de Pareto et SD.

Soit $x \in (\mathbb{R}^+)^n$ et $(.)$ une permutation triant les composantes de x par ordre décroissant. On définit alors le vecteur de Lorenz $L(x) \in (\mathbb{R}^+)^n$ par : $\forall\ k \in [\![1; n]\!],\ L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} x_{(i)}$ et la dominance de Lorenz $\succsim_L$ par : $x \succsim_L y$ ssi $L(x) \succsim_P L(y)$.

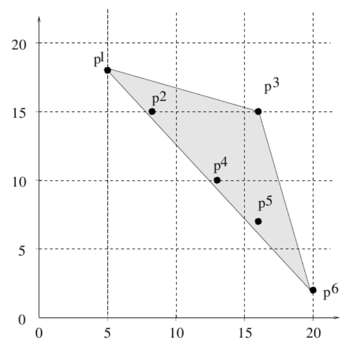
Proposition 1. ***(Shorrocks, 1983) [10].*** *La dominance de Lorenz est le plus petit préordre partiel sur $(\mathbb{R}^+)^n$ vérifiant la P-monotonie, le principe de transfert et la symétrie.*

Proposition 2. ***(Shorrocks, 1983) [11].*** *Les composantes du vecteur de Lorenz se réécrivent en fonction de $\check{G}$: $L_k(x) = n \int_{p=0}^{\frac{k}{n}} \check{G}_x(p)dp$.*

Par exemple, $(10, 10) \succsim_L (5, 16)$ car $(10, 10) \succsim_L (5, 15)$ par le principe de transfert et $(5, 15) \succsim_P (5, 16)$ par la P-monotonie, la transitivité permettant de conclure (on peut d'ailleurs remarquer que ni la dominance de Pareto ni la dominance stochastique ne peuvent discriminer ces deux vecteurs). La dominance de Lorenz combine donc deux aspects : elle discrimine des vecteurs à somme de coûts constante en répartissant au mieux les coûts et discrimine entre vecteurs de sommes de coûts différentes par le principe de Pareto. La dominance de Lorenz entre deux vecteurs peut d'ailleurs toujours s'écrire comme un nombre fini d'applications de ces deux propriétés.

Bien qu'elle soit axiomatiquement très satisfaisante, la dominance de Lorenz est peu discriminante dans un contexte multi-agents dès que le nombre d'agents devient trop important. De plus, il est souvent peu acceptable de ne pas préférer $(100.1, 100)$ à $(50, 150)$ alors qu'on préfère $(100, 100)$ à $(50, 150)$, ce qui va nous inciter à introduire une notion de

compensation, plutôt que d'exiger que les n inégalités (de la dominance de Pareto sur les vecteurs de Lorenz) soient strictement vérifiées. Malheureusement, la somme pondérée, qui établit une compensation entre les agents et agrège leurs coûts sous forme d'un score, est un mauvais candidat car elle ne trouve que les solutions de l'enveloppe convexe et peut donc passer à côté des solutions les plus équitables, comme le montre le dessin suivant, où p_4, pourtant très équitable, ne minimise aucune somme pondérée :



Nous allons donc introduire un critère, proche de la somme pondérée, qui agrège les performances des agents en un score numérique et introduit une notion de compensation par rapport à la dominance de Lorenz : le critère OWA (pour Ordered Weighted Average), qui induit une relation de préférence (préordre total) minimisant le critère.

On fixe un jeu de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ et $w_i \in [0,1]$, et on notera désormais (.) la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant. On a alors :

$$\mathrm{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} (w_i - w_{i+1}) L_i(x)$$

Ce critère OWA est très riche. Il contient par exemple le maximum ou le minimum (en mettant respectivement w_1 ou w_n à 1 et les autres poids à 0), mais également la médiane et la moyenne. L'intérêt de ce critère en équité est de pouvoir pénaliser les coûts les plus élevés avec des poids importants pour les petits indices (correspondant aux coûts les plus élevés). Par exemple, en appliquant le jeu de poids $(2,1)$ aux solutions $p_1 = (5,18)$, $p_4 = (13,10)$ et $p_6 = (20,2)$ de l'exemple précédent, on obtient pour ces solutions des scores de 41, 36 et 42, et c'est donc la solution p_4 qui est jugée la plus équilibrée, ce qui est satisfaisant.

Le critère OWA est manifestement plus riche que la dominance de Lorenz, mais en contrepartie impose le choix d'un jeu de poids (qui peut s'avérer hasardeux en l'absence d'informations sur les préférences). Nous allons maintenant montrer qu'il existe une famille d'**OWA équitables** (*leur jeu de poids est strictement positif et strictement décroissant*) qui prolongent la dominance de Lorenz en un préordre total. Nous allons tout d'abord introduire les axiomes nécessaires pour énoncer ce résultat de Perny & Spanjaard [2].

Les deux premiers axiomes imposent de ne discriminer des distributions qu'à partir de leur $\check{G}$ et d'être compatible avec la dominance de Lorenz. Les trois axiomes qui suivent sont ceux de von Neumann et Morgenstern (1947) [12] exprimés dans l'espace de Lorenz.

Neutralité. $\check{G}(x) = \check{G}(y) \Rightarrow x \sim y$.

Stricte L-monotonie. $L(x) \succ_P L(y) \Rightarrow x \succ y$.

Pré-ordre total. $\succsim$ est réflexive, transitive et complète.

Continuité. Soient L, M et $N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big)$ avec $L \succ M \succ N$. Alors :
$\exists\ (\alpha, \beta) \in\ ]0,1[$ tels que : $\alpha L + (1-\alpha)N \succ M \succ \beta L + (1-\beta)N$.

Indépendance. Soient L, M et $N \in L\big((\mathbb{R}^+)^p\big)$ avec $L \succ M$. Alors :
$\forall\ \alpha \in\ ]0,1[\ : \alpha L + (1-\alpha)N \succ \alpha M + (1-\alpha)N$.

(Γ)

Les cinq axiomes de (Γ) permettent de prolonger la dominance de Lorenz en un critère OWA équitable, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3. ***(Perny & Spanjaard, 2006)*** *[2]. Sous les axiomes* (Γ)*, les préférences sont représentables par un critère OWA équitable.*

Un critère OWA représente donc une notion d'équité lorsque son jeu de poids est strictement positif et strictement décroissant. Cette condition est logique puisque l'on veut pénaliser les plus grands coûts pour favoriser une répartition égalitaire entre les agents.

Nous avons donc défini une suite de critères emboîtés SD $\subseteq$ L $\subseteq$ OWA$_{eq}$ qui modélisent l'équité dans un cadre non pondéré et qui peuvent s'exprimer directement sur $\check{G}$:

- **la dominance stochastique** non pondérée *(dominance fonctionnelle sur $\check{G}$)*
- **la dominance de Lorenz** *(dominance fonctionnelle sur la primitive de $\check{G}$)*
- **les critères OWA équitables** *(somme pondérée sur la primitive de $\check{G}$)*

La dominance de Lorenz modélise parfaitement l'idée d'équité dans le cas non pondéré, mais souffre de l'absence de compensation et est à ce titre peu discriminante. Le critère OWA équitable présente l'avantage d'introduire la compensation et le pouvoir discriminant, au prix de l'élicitation d'un jeu de poids adéquat.

1.4 Dominance stochastique d'ordre 2 (SSD) et critère WOWA

Nous introduisons maintenant le pendant de la dominance de Lorenz et d'OWA dans le cas pondéré : la dominance stochastique d'ordre 2 (SSD) et le critère Weighted-OWA (WOWA), aussi appelé critère de Yaari. Le critère de Yaari est lui-même un cas particulier du critère Rank Dependant Utility (RDU).

On définit à partir de G_x et $\check{G}_x$ les fonctions d'ordre 2 suivantes : $G_x^2(z) = \int_z^M G_x(y)dy$ et $\check{G}_x^2(p) = \int_0^p \check{G}_x(y)dy$. La comparaison en terme d'équité de deux répartitions de coûts (en suivant uniquement le principe de transfert et la dominance de Pareto) s'écrit alors tout simplement comme la dominance fonctionnelle sur ces fonctions d'ordre deux [13], ce qui constitue la *dominance stochastique d'ordre 2* (SSD), définie indifféremment par :

$$x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall z, G_x^2(z) \leq G_y^2(z).$$

ou bien

$$x \succsim_{SSD} y \Leftrightarrow \forall p \in [0,1], \check{G}_x^2(p) \leq \check{G}_y^2(p).$$

Pour une caractérisation axiomatique de SSD en terme de principe de transfert adapté au cas continu, on peut se reporter à Machina-Prat (1997) [14]. Dans le cas d'une distribution de coûts équipondérée, SSD se ramène à la dominance de Lorenz ; en effet, pour des fonctions $\check{G}$ en escalier, SSD se réduit à la comparaison des $\check{G}^2$ aux points de rupture de $\check{G}$. La distribution étant équipondérée, les n points de rupture sont en $\frac{k}{n}$. Or, d'après la proposition 2, on a : $\check{G}_x^2(\frac{k}{n}) = L_k(x)/n$. SSD s'exprime donc comme n inégalités, équivalentes à la dominance de Lorenz. **SSD étend donc la dominance de Lorenz au cas pondéré**.

Nous définissons maintenant le critère Weighted-OWA (WOWA) qui étend le critère OWA à un cadre pondéré [15]. On fixe un jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$ tel que $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ et $w_i \in [0,1]$. On associe à ce jeu de poids une fonction w^* telle que $w^*(\frac{k}{n}) = \sum_{i=1}^k w_i$ et w^* strictement croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Le critère WOWA s'écrit alors :

$$\mathrm{WOWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n \left[w^* \left(\sum_{j=1}^i p_{(j)} \right) - w^* \left(\sum_{j=1}^{i-1} p_{(j)} \right) \right] x_{(i)}$$

(.) permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant. Dans le cas d'agents équipondérés, on retombe (sans surprise) sur un OWA de jeu de poids w. **Le critère WOWA étend donc le critère OWA au cas pondéré**. L'intuition est simplement d'adapter les poids de pondération des coûts en fonctions du poids de chaque agent sous forme d'une fonction construite pour coïncider dans le cas non pondéré avec un OWA. Ce critère est également connu comme le critère de Yaari [16], qui se définit directement à partir d'une *fonction de déformation* φ, qui joue le rôle de w^* et qui indique le poids accordé aux coûts en fonction de leur rang, ce qui permet d'étendre la notion de jeux de poids au cadre continu.

Proposition 4. *Le critère WOWA pour une fonction de déformation φ deux fois dérivable admet les formulations suivantes (preuve en annexe C) :*

- $\sum_{i=1}^n \big(\varphi(X \geq x_{(i)}) - \varphi(X > x_{(i)})\big) x_{(i)}$ *dans le cas discret uniquement*
- $\int_{x=0}^1 \varphi'(x)\check{G}(x)dx$
- $\int_{x=0}^1 -\varphi''(x)\check{G}^2(x)dx$

2 Prolongement de SSD en un critère d'équité total

L'objectif de cette partie est de proposer de nouveaux critères d'équité qui prolongent la dominance stochastique d'ordre 2 (SSD) en un préordre total. Or, WOWA et SSD correspondent à l'extension pondérée des critères OWA et L (dominance de Lorenz). Par analogie avec le lien entre L et OWA équitable établi en proposition 3, nous montrons que SSD se prolonge en un critère WOWA, et plus généralement en une intégrale de Choquet.

2.1 De SSD à WOWA : une approche par duplication des agents

Nous travaillons sur l'espace des fonctions décumulatives, puis transposons les résultats dans l'espace de départ (les vecteurs pondérés). Nous ferons ici l'hypothèse que nous sommes dans un contexte où *les poids des agents sont additifs* et de somme 1, comme c'est le cas dans le contexte probabiliste par exemple.

Soit un ensemble de n agents de poids respectifs $\frac{d_1}{p}, \dots, \frac{d_n}{p}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} d_i = p$; nous faisons l'hypothèse que les poids des agents sont multiples de $\frac{1}{p}$. Cela se justifie en pratique par l'imprécision qui affecte l'évaluation du poids d'une coalition d'agents : les poids constituent rarement une donnée objective connue avec précision. Cette hypothèse, combinée à l'additivité des poids, nous assure que les points de rupture de la fonction en escalier $\check{G}$ ont leurs abscisses multiples de $\frac{1}{p}$.

Pour se ramener au cadre non pondéré, nous allons introduire la notion de **duplication** et appliquer la proposition 3 sous les axiomes (Γ). Ce processus implique de plonger dans un sur-ensemble de l'ensemble des fonctions décumulatives associé à notre pondération : on peut comparer des $\check{G}$ correspondant à des vecteurs pondérés de pondérations différentes.

Soit x un vecteur pondéré. On pose : $z_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_j$. Par l'axiome de Neutralité, nous n'évaluons l'équité des solutions qu'à partir de leur fonction $\check{G}$. On introduit alors p agents de poids $\frac{1}{p}$ dont le vecteur de coûts $\tilde{x}$ est choisi pour que $\check{G}_x = \check{G}_{\tilde{x}}$. Comme les poids sont additifs, il suffit d'attribuer le coût x_i de l'agent i à un nombre d'agents dupliqués proportionnel au poids de l'agent i ainsi : $\forall i \in [1, n],\ \tilde{x}_{z_i+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_i+d_i} = x_i$.

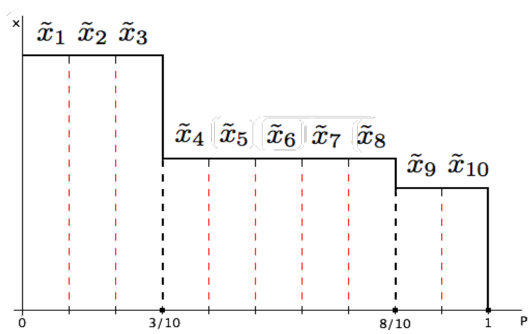


Illustration de la duplication : $\check{G}$ pour une distribution de coûts de $(10, 6, 5)$ sur des agents pondérés par .3, .5 et .2 et duplication par 10 agents équipondérés de même $\check{G}$.

Proposition 5. *Sous les axiomes* (Γ), *et dans le cas où les poids des agents sont additifs, les préférences sont représentables par un critère WOWA dont la fonction de déformation* φ *est strictement concave.*

L'axiome de Neutralité nous permet d'affirmer que x et $\tilde{x}$ sont équivalents du point de vue de l'équite puisqu'ils ont même $\check{G}$. Sous les axiomes (Γ), on peut donc appliquer le résultat de la proposition 3 sur le vecteur non pondéré $\tilde{x}$, et on obtient alors un critère OWA équitable sur $\tilde{x}$ avec un jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_p)$. Soit (.) une permutation triant les composantes de x par ordre décroissant. On a alors la chaîne d'inégalités suivante qui permet de trier les composantes de $\tilde{x}$ par ordre décroissant :

$x_{(1)} = \tilde{x}_{z_{(1)}+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_{(1)}+d_{(1)}} \geq x_{(2)} = \tilde{x}_{z_{(2)}+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_{(2)}+d_{(2)}} \geq \ldots$
$\cdots \geq x_{(n-1)} = \tilde{x}_{z_{(n-1)}+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_{(n-1)}+d_{(n-1)}} \geq x_{(n)} = \tilde{x}_{z_{(n)}+1} = \cdots = \tilde{x}_{z_{(n)}+d_{(n)}}$

et, en posant $\zeta_i = \sum_{j=1}^{i-1} d_{(j)}$ le critère OWA_w sur $\tilde{x}$ peut donc s'écrire :

$x_{(1)}(w_{\zeta_1+1} + \cdots + w_{\zeta_1+d_{(1)}}) + x_{(2)}(w_{\zeta_2+1} + \cdots + w_{\zeta_2+d_{(2)}}) + \ldots$
$+x_{(n-1)}(w_{\zeta_{n-1}+1} + \cdots + w_{\zeta_{n-1}+d_{(n-1)}}) + x_{(n)}(w_{\zeta_n+1} + \cdots + w_{\zeta_n+d_{(n)}})$.

Soit φ une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telle que : $\varphi(\frac{i}{p}) = \sum_{j=1}^{i} w_j$. En remarquant que $\varphi(X \geq x_{(i)}) - \varphi(X > x_{(i)}) = \varphi(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{i} d_{(j)}) - \varphi(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{i-1} d_{(j)}) = w_{\zeta_i+1} + \cdots + w_{\zeta_i+d_{(i)}}$, on réécrit finalement l'OWA sur $\tilde{x}$ directement sur x :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \left(\varphi(X \geq x_{(i)}) - \varphi(X > x_{(i)})\right).$$

On reconnaît un critère WOWA. Le jeu de poids w étant strictement décroissant (puisque OWA_w est équitable), la fonction φ est strictement concave. □

Corollaire 1. *Un critère WOWA est équitable lorsque le jeu de poids qui lui est associé est équitable (strictement décroissant et strictement positif), ce qui correspond à une fonction de déformation strictement concave.*

Nous avons donc défini une suite de critères d'équité emboîtés SD $\subseteq$ SSD $\subseteq$ WOWA_{eq} qui sont le pendant pondéré des critères d'équité emboîtés SD $\subseteq$ L $\subseteq$ OWA_{eq} .

2.2 Généralisation de ces résultats dans l'axiomatique de vNM

Soit un OWA équitable de jeu de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$. On a donc : $w_1 > w_2 > \cdots > w_n > 0$. On rappelle qu'en posant $w' = (w_1 - w_2,\ w_2 - w_3, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n)$, on a $w' > 0$ et : $\text{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w'_i L_i(x)$, c'est-à-dire que l'OWA de poids w peut se réécrire comme une somme pondérée de poids $w' > 0$ sur l'espace de Lorenz. C'est un résultat très intéressant lorsque l'on replace les axiomes de von Neumann & Morgenstern (vNM) dans leur contexte initial : ce sont en effet ces axiomes qui amènent à représenter des préférences par une fonction d'utilité linéaire sur l'espace considéré. Une idée intéressante serait donc de généraliser ce résultat au cas de SSD et d'englober ainsi les résultats précédents, qui utilisent les mêmes axiomes. Or, l'équivalent d'une somme pondérée dans l'espace discret de Lorenz est, pour SSD, une intégrale de $\check{G}^2$ pondérée par une fonction de poids (c-à-d une fonction d'intégrale 1) strictement positive. Ce passage au cadre continu (qui implique de travailler sur des espaces vectoriels infinis) exige un axiome supplémentaire purement technique (se reporter à von Neumann & Morgenstern [12]) ; pour se passer de cet axiome, il suffit de travailler sur l'espace vectoriel de dimension fini des fonctions $\check{G}$ en escalier dont les points de rupture sont prédéterminés et en nombre fini (ce qui est le cas ici puisque l'on a fixé une précision $\frac{1}{p}$ et donc p points de rupture).

Proposition 6. *Sous les axiomes* (Γ)*, les préférences sont représentables par le critère à minimiser :* $\int_{t=0}^{1} \Psi(t)\check{G}(t)dt$ *avec* Ψ *fonction strictement décroissante de* $[0,1]$ *dans* $[0,1]$ *vérifiant* $\Psi(0) = 1$ *et* $\Psi(1) = 0$*.*

En s'imposant le jeu d'axiomes de vNM exprimés sur l'espace des fonctions décumulatives d'ordre 2, il existe $f > 0$ (qui joue le rôle des λ_i) une fonction de poids (de $[0,1] \to \mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_{x=0}^{1} f(x)dx = 1$) telle que les préférences minimisent le score :

$$S_f(x) = \int_{x=0}^{1} f(x)\check{G}^2(x)dx = \int_{x=0}^{1} f(x) \int_{t=0}^{x} \check{G}(t)dtdx$$

La somme pondérée sur $\check{G}$ n'est pas apparente en raison de l'imbrication de deux intégrales. On peut cependant écrire :

$$S_f(x) = \int_{0 \leq t \leq x \leq 1} f(x)\check{G}(t)dtdx$$

Ce qui nous permet d'écrire, en intervertissant les intégrales :

$$S_f(x) = \int_{t=0}^{1} \check{G}(t) \int_{x=t}^{1} f(x)dxdt$$

Soit, en posant $\Psi(t) = \int_{x=t}^{1} f(x)dx$, qui est une fonction de $[0,1]$ dans $[0,1]$, strictement décroissante (car $f > 0$) vérifiant $\Psi(0) = 1$ et $\Psi(1) = 0$:

$$S_f(x) = \int_{t=0}^{1} \Psi(t)\check{G}(t)dt.$$

Le caractère strictement décroissant de Ψ s'interprête parfaitement en terme d'équité : on accorde plus de poids aux coûts importants pour les pénaliser. □

Cette généralisation dans le cadre de la théorie de vNM nous permet de formaliser les similitudes entre le prolongement de L en un OWA et celui de SSD en un WOWA. En réécrivant simplement cette intégrale pondérée dans l'espace de départ sur les vecteurs pondérés, nous montrons que l'on retrouve le critère WOWA (qui se simplifie en OWA dans le cas non pondéré) lorsque les poids des agents sont additifs.

2.3 De SSD à WOWA : le cas de poids additifs

Nous nous plaçons dans le cas particulier où les poids des agents sont additifs ; le poids d'une coalition est alors la somme des poids des agents qui la composent. Nous allons montrer que le critère de la proposition 6 peut se réécrire comme un WOWA équitable, ce qui constitue une deuxième démonstration de la proposition 5 (qui est donc un corollaire de la proposition 6).

Dans le cas d'une distribution discrète x sur n agents pondérés par $p_1, \ldots, p_n$, les préférences minimisent, d'après la proposition 6, un critère de la forme $S_G = \int_{t=0}^{1} \Psi(t)\check{G}(t)dt$ avec Ψ fonction positive strictement décroissante. En notant φ la primitive de Ψ s'annulant en 0, et comme les points de rupture de la fonction en escalier $\check{G}$ sont connus, on a :

$$\begin{aligned}
S_G &= \int_{t=0}^{1} \check{G}(t)\Psi(t)dt \\
&= x_{(1)} \int_{t=0}^{p_{(1)}} \Psi(t)dt + x_{(2)} \int_{t=p_{(1)}}^{p_{(1)}+p_{(2)}} \Psi(t)dt + \cdots + x_{(n)} \int_{t=p_{(1)}+\cdots+p_{(n-1)}}^{1} \Psi(t)dt \\
&= x_{(1)}\varphi(p_{(1)}) + x_{(2)} \left(\varphi(p_{(1)} + p_{(2)}) - \varphi(p_{(1)})\right) + \cdots + x_{(n)} \left(\varphi(1) - \varphi(p_{(1)} + \cdots + p_{(n-1)})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_{(k)} \left(\varphi(P(X \geq x_{(k)})) - \varphi(P(X > x_{(k)}))\right) = \text{ WOWA}_\varphi(x).
\end{aligned}$$

On remarque que $\varphi' = \Psi$ est strictement décroissante, donc φ est strictement concave, ce qui confirme l'équité du critère WOWA en accord avec la proposition 5. Ainsi, la somme pondérée positive dans l'espace des fonctions décumulatives se réécrit comme un critère WOWA équitable dans le cas de poids additifs. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 2. *Un critère WOWA équitable est une somme pondérée strictement positive dans l'espace des* $\check{G}^2$ *(équivalent de l'espace de Lorenz dans le cas pondéré).*

2.4 Poids non additifs et intégrale de Choquet

On se place dans le cas plus générique de poids non additifs [17]. En notant μ la capacité qui donne le poids d'un sous-ensemble d'indices d'agents, on a : $G_x(z) = \mu(\{i \mid x_i > z\})$.

On rappelle qu'une *capacité* ν est une fonction de $\mathcal{P}(X)$ dans $[0,1]$ croissante pour l'inclusion, telle que $\nu(\emptyset) = 0$ et $\nu(X) = 1$, et que ν est dite *sous-modulaire* si :

$$\forall A, B \subset X,\ \nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) \leq \nu(A) + \nu(B).$$

A partir d'une capacité ν, on peut définir l'*intégrale de Choquet* C_ν d'un vecteur pondéré x, en notant (.) la permutation triant les x_i dans l'ordre décroissant :

$$C_\nu(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{(k)} \left(\nu(X \geq x_{(k)}) - \nu(X > x_{(k)})\right).$$

Proposition 7. *Sous les axiomes* (Γ)*, pour* μ *fonction sous-modulaire de poids des coalitions, les préfèrences s'expriment sous la forme d'une intégrale de Choquet équitable de capacité* $\nu = \varphi \circ \mu$ *avec* φ *fonction de déformation d'un WOWA équitable.*

Soit x un vecteur pondéré. Soit (.) une permutation triant les composantes de x par ordre décroissant. Les préférences s'expriment, d'après la proposition 6, par le critère : $\int_{t=0}^{1} \check{G}(t)\Psi(t)dt$. Soit φ la primitive de Ψ s'annulant en 0. Le critère se réécrit alors :

$$\int_{t=0}^{\mu(\{(1)\})} \check{G}(t)\Psi(t)dt + \int_{t=\mu(\{(1)\})}^{\mu(\{(1),(2)\})} \check{G}(t)\Psi(t)dt + \cdots + \int_{t=\mu(\{(1),\ldots,(n-1)\})}^{1} \check{G}(t)\Psi(t)dt$$

$$= x_{(1)}\varphi\Big(\mu\big(\{(1)\}\big)\Big) + x_{(2)}\left[\varphi\Big(\mu\big(\{(1),(2)\}\big)\Big) - \varphi\Big(\mu\big(\{(1)\}\big)\Big)\right] + \ldots$$
$$\cdots + x_{(n)}\left[\varphi\Big(\mu\big(\{(1),\ldots,(n)\}\big)\Big) - \varphi\Big(\mu\big(\{(1),\ldots,(n-1)\}\big)\Big)\right]$$

$$= x_{(1)}\varphi\Big(\mu\big(X \geq x_{(1)}\big)\Big) + x_{(2)}\left[\varphi\Big(\mu\big(X \geq x_{(2)}\big)\Big) - \varphi\Big(\mu\big(X\, x_{(2)}\big)\Big)\right] + \ldots$$
$$\cdots + x_{(n)}\left[\varphi\Big(\mu\big(X \geq x_{(n)}\big)\Big) - \varphi\Big(\mu\big(X > x_{(n)}\big)\Big)\right]$$

En posant $\nu = \varphi \circ \mu$, le critère se réécrit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{(k)}\big(\nu(X \geq x_{(k)}) - \nu(X > x_{(k)})\big) = C_\nu(x)$. $\square$

Cela permet donc de *décomposer une capacité de Choquet en deux* : d'une part, une fonction de poids des coalitions (qui quantifie l'importance accordée à un sous-ensemble d'agents pour mesurer l'équité), et d'autre part, une fonction qui pondère les coûts selon leur importance relative (ce qui permet de pénaliser les plus grands coûts pour favoriser la répartition dans le cadre de l'équité). La capacité utilisée dans une intégrale de Choquet mélange donc ces deux aspects, ce qui rend son interprétation directe difficile. Cette construction de l'intégrale de Choquet à partir de deux fonctions rappelle le critère WOWA qui isole les deux jeux de poids intervenant dans le critère de Yaari.

On remarque que pour μ additive, l'intégrale de Choquet équitable se simplifie en un critère WOWA équitable (ce qui est logique puisque l'on se place alors dans le contexte de poids additifs traité précédemment) ; l'intégrale de Choquet est un critère générique qui contient les critères OWA et WOWA.

Il existe donc trois familles de critères emboîtées ($\text{OWA}_{eq} \subseteq \text{WOWA}_{eq} \subseteq$ Choquet) qui prolongent SSD en un critère d'équité total, en fonction des hypothèses que l'on fait sur les poids des agents. **SSD est prolongée par** :

- **les OWA équitables** dans le cas d'agents non pondérés
- **les WOWA équitables** dans le cas d'agents pondérés de poids additifs
- **les Choquet équitables** dans le cas d'agents pondérés de poids quelconques.

3 Lorenz d'ordre infini L_∞ : un WOWA équitable particulier

Le critère WOWA permet de modéliser finement la notion d'équité en choisissant une fonction de déformation des poids strictement concave. Mais *la détermination de cette fonction pose problème en l'absence d'informations sur les préférences* : que choisir pour prolonger SSD en un critère WOWA de façon satisfaisante ? L'itération de la dominance de Lorenz est un raffinement mécanique naturel, qui converge de façon totalement inattendue vers un critère WOWA équitable, bon candidat pour modéliser l'équité par défaut.

3.1 Écriture matricielle de Lorenz et itération

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in (\mathbb{R}^+)^n$. Le vecteur x correspond aux coûts de différents scénarios non pondérés (dont les rôles sont donc symétriques). On suppose sans perte de généralité (il suffit de permuter les composantes du vecteur grâce à l'hypothèse de symétrie) que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. On rappelle que, en minimisation, le vecteur de Lorenz $L(x) \in (\mathbb{R}^+)^n$ et la dominance de Lorenz $\succsim_L$ sont définis, pour tout x à composantes croissantes, par :

$$L(x) = \left(\sum_{j=n-i+1}^{n} x_j \right)_{(i=1 \ldots n)} \qquad \text{et} \qquad x \succsim_L y \ \text{ ssi } \ L(x) \succsim_P L(y)$$

La dominance de Lorenz est assez peu discriminante. Elle ne peut par exemple pas comparer les vecteurs $(10, 10)$ et $(18, 1)$ (le premier, bien que plus équilibré, a un coût global de 20, contre 19 pour le suivant). Il peut sembler cependant naturel à nombre de décideurs de choisir la première solution (son caractère bien équilibré l'emportant alors sur le coût global très légèrement supérieur). Une idée naturelle et mécanique consiste alors à chercher le vecteur de Lorenz le plus équitable (donc calculer le vecteur de Lorenz du vecteur de Lorenz), et à répéter l'opération autant de fois que nécessaire pour pouvoir comparer les 2 vecteurs. Il faut, sur cet exemple, 3 itérations pour déclarer que $(10, 10)$ est meilleur que $(18, 1)$. Cette justification empirique n'est pas suffisante, mais elle donne l'intuition de cette manière de procéder. Nous allons donc étudier les itérations de Lorenz.

$$\text{Soit } L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & 1 & & \vdots \\ 0 & \iddots & & & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}). \ L \text{ est définie par : } l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a construit L de sorte que $L(x) = L.x$ pour x trié par composantes croissantes. L'intérêt d'une telle démarche est de ramener l'itération de Lorenz au calcul de puissances d'une matrice, ce qui simplifie considérablement l'étude de l'itération de Lorenz à un ordre quelconque et la recherche d'équivalents.

Comme $L(x)$ est un vecteur dont les composantes sont triées par ordre croissant (somme d'un nombre croissant de termes positifs), on a : $L(L(x)) = L.L(x) = L.(L.x) = L^2.x$. Une récurrence simple nous amène au résultat suivant, en notant $L^{(k)}$ la composée k fois de L :

Proposition 8. $\forall\ k \in \mathbb{N},\ L^{(k)}(x) = L^k.x$

L'itération de Lorenz d'ordre k induit un ordre partiel $\succsim_{L^{(k)}}$ défini par : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $L^{(k)}(x) \succsim_P L^{(k)}(y)$. Il s'agit bien d'un ordre puisque la dominance de Pareto est un ordre et que L est inversible. La dominance de Lorenz étant Pareto-compatible, $(\succsim_{L^{(k)}})$ est une suite d'ordres emboîtés (donc de plus en plus discriminants) ; à ce titre, elle converge vers un ordre $\succsim_{L^\infty} = \bigcup \succsim_{L^{(k)}}$ que nous allons caractériser à l'aide d'un équivalent de L^k.

3.2 Convergence vers un OWA

L est une matrice symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable (*théorème spectral en dimension finie*), avec une matrice de passage P orthogonale (i.e. ${}^tPP = Id$). Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ (les n valeurs propres de la matrice) tels que :

$$L = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P. \text{ Et on a donc : } L^k = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} P.$$

Posons $L^k = \begin{pmatrix} -L_1^k- \\ \vdots \\ -L_n^k- \end{pmatrix}$. On a alors : $x \succsim_{L^{(k)}} y$ ssi $\begin{cases} L_1^k.x \leq L_1^k.y \\ \vdots \\ L_n^k.x \leq L_n^k.y \end{cases}$.

La décomposition de L^k en lignes, et l'expression de la dominance de Pareto sur l'itération k du vecteur de Lorenz permet donc d'écrire $\succsim_{L^{(k)}}$ comme l'intersection de n ordres. L'idée pour montrer la convergence vers un OWA est d'exprimer ces n ordres et de montrer qu'ils deviennent équivalents lorsque k tend vers l'infini, ce qui permet de les agréger en une seule inégalité à vérifier, inégalité dont les coefficients convergent également à l'infini, ce qui prouve alors la convergence vers un OWA (et non pas une moyenne pondérée simple, puisque les composantes de x sont triées).

Nous allons donc nous intéresser aux n inégalités définies par la dominance de Pareto entre deux vecteurs de Lorenz d'ordre k, ce qui revient à chercher les coefficients de $x_1, ..., x_n$ dans ces n inégalités. On note $e_i = (\delta_{ij})_{(j=1\cdots n)}$ et $E_i = {}^te_i.e_i$ (un 1 en position (i,i) et 0 ailleurs). En notant P_i la ligne i de la matrice P et $A_i = {}^tP_iP_i$, on a :

$$L^k = {}^tP\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^k E_i\right)P = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k ({}^tP_iP_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k A_i$$

Lemme 1. $|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$

(démontré en annexe D, en diagonalisant la matrice pour tout n).

L est à coefficients positifs donc $\lambda_1 > 0$. L'intérêt de savoir que les valeurs propres sont de modules 2 à 2 distincts réside dans l'écriture du développement de Taylor à tout ordre (utile pour départager deux vecteurs de Lorenz ayant même équivalent).

Lemme 2. $L^k \sim \lambda_1^k A_1$ *car* $A_1 > 0$

Cette équivalence, démontrée en annexe D, doit se comprendre comme n^2 équivalences (d'où la nécessité que les coefficients de A_1 soient tous non nuls). On a donc : $L^k(x) \sim \lambda_1^k \, {}^tP_1(P_1.x)$. Or, $P_1.x$ est un OWA de x, que nous appelerons W_1 et qui a pour jeu de poids P_1. Nous prouvons en annexe E le résultat suivant *(en explicitant les valeurs propres)* :

Lemme 3. *En posant* $w = \frac{\pi}{2n+1}$*, les poids de* W_1 *(à un coefficient multiplicatif* > 0 *près) sont, dans l'ordre croissant des coûts :* $(\sin(kw))_{k=1...n}$ *et* W_1 *est donc un OWA équitable*

On peut réécrire l'équivalence : $L^k(x) \sim W_1(x).\lambda_1^k \, {}^tP_1P_1$. Comme $P_1 > 0$, on a donc :

Lemme 4. *Si* $W_1(x) < W_1(y)$*, alors à partir d'un certain rang* k_0 *:* $x \succ_{L^{(k)}} y$

Cependant, dans le cas où le W_1 de deux vecteurs est identiques, ils ont même équivalent, et on ne peut donc pas les discriminer à l'aide de cet équivalent. Pour savoir s'il y a dominance de Pareto entre eux, il faut donc s'intéresser aux ordres suivants dans le développement de Taylor, et on pourrait imaginer qu'effectivement, à un certain ordre, l'un s'avère dominer l'autre au sens de Pareto après un nombre suffisant d'itérations. De façon assez surprenante, ce n'est pas le cas. En effet, nous montrons en annexe E que :

Lemme 5. *Si* $x \neq y$ *et* $W_1(x) = W_1(y)$*, alors* x *et* y *sont incomparables pour* $\succsim_{L^{(\infty)}}$

On en déduit alors le résultat principal de cette partie, qui prouve la convergence de l'itération d'ordre infini de Lorenz vers un OWA (dont nous pourrons donner une formule générale en diagonalisant la matrice), à partir des lemmes 4 et 5 :

Proposition 9. $\succ_{L^\infty} = \succ_{W_1}$

La partie asymétrique du préordre total $\succsim_{W_1}$ coïncide donc avec la partie asymétrique de l'ordre partiel $\succsim_{L^{(\infty)}}$, ce qui permet de conclure que la dominance de Lorenz d'ordre infini en dimension n est l'ordre partiel du préordre total induit par l'OWA de poids P_1.

Ainsi, la dominance de Lorenz à l'ordre n converge vers un critère OWA qui s'écrit :

$\mathrm{W}_1(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) x_{(k)}$ avec (.) permutation triant les x_i dans l'ordre croissant.

Remarque : ce résultat n'est plus valable si l'on itère la dominance stochastique [18], ce qui conforte l'intérêt et l'originalité de l'itération de la dominance de Lorenz en minimisation.

3.3 Convergence vers un WOWA

Le processus de duplication nous permet d'appliquer le résultat précédent à des vecteurs pondérés et de nous ramener à l'itération de SSD. Cette démarche nous permet de montrer la convergence vers le WOWA associé à l'OWA W_1.

Proposition 10. *L'itération continue de la dominance de Lorenz converge vers un WOWA :*

$$\int_0^1 \frac{\pi}{2} \cos\big(x\frac{\pi}{2}\big)\check{G}(x)dx.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on n'obtient plus les coefficients discrets d'un OWA sous la forme $\sin(kw)$, mais tout simplement une densité de poids $\psi(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x\frac{\pi}{2})$, qui constitue la limite de l'itération de Lorenz dans le cas continu (nous avons normalisé la fonction pour que son intégrale vaille 1).

La densité des poids de l'OWA obtenu dans le cas continu suit cette fonction lorsque les composantes du vecteur de coûts x sont triés dans l'ordre croissant. La norme étant, en minimisation, de classer plutôt les composantes par ordre décroissant, nous nous intéressons donc à la fonction "miroir" de ψ, qui est tout simplement : $\tilde{\psi}(x) = \frac{\pi}{2}cos(x\frac{\pi}{2})$

Le critère WOWA suivi est donc : $\int_0^1 \frac{\pi}{2}\cos(x\frac{\pi}{2})\check{G}(x)dx$. Pour obtenir la fonction de déformation associée à WOWA, il suffit, d'après la proposition 4, de calculer la primitive de cette fonction, qui est donc $\varphi(x) = sin(x\frac{\pi}{2})$. □

Corollaire 3. *Le jeu de poids w^n de l'OWA associé à ce WOWA (cas discret avec n agents équipondérés) est défini par :* $w_k^n = \sin(\frac{k}{2n}\pi) - \sin(\frac{k-1}{2n}\pi)$

Exemple : pour comparer les vecteurs $u = (20, 2, 10)$ et $v = (11, 12, 13)$, on itère Lorenz :
- $L(u) = (20, 30, 32)$, $L^2(u) = (32, 62, 82)$, et $L^3(u) = (82, 144, 176)$
- $L(v) = (13, 25, 36)$, $L^2(v) = (36, 61, 74)$, et $L^3(v) = (74, 135, 171)$

Comme $L^3(v) \succ_P L^3(u)$, on préfère v à u : son caractère équilibré l'emporte sur son coût totale pourtant plus élevé. On retrouve directement ce résultat en utilisant l'OWA w^3 de poids $(\sin(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{3}) - \sin(\frac{\pi}{6}), 1 - \sin(\frac{\pi}{3})) \simeq (0.5, 0.37, 0.13)$. On obtient $w^3(u) \simeq 0.5 * 20 + 0.37 * 10 + 0.13 * 2 \simeq 13.9$ et $w^3(v) \simeq 0.5 * 13 + 0.37 * 12 + 0.13 * 11 \simeq 12.4$.

3.4 Propriétés remarquables

Nous avons donc établi la convergence de l'itération de Lorenz vers un OWA w^n, que l'on transpose facilement à un WOWA applicable dans le cas pondéré continu. Le critère WOWA obtenu est équitable (car sa fonction de déformation est strictement concave, corollaire 1), ce qui est donc tout à fait satisfaisant et en fait un candidat très intéressant pour modéliser l'équité en l'absence d'informations sur les préférences.

Pour finir, nous allons étudier deux propriétés remarquables de Lorenz itéré : la difficulté à transposer le résultat en maximisation d'utilité et l'interprétation géométrique intéressante qu'on peut faire des coefficients de l'OWA w^n.

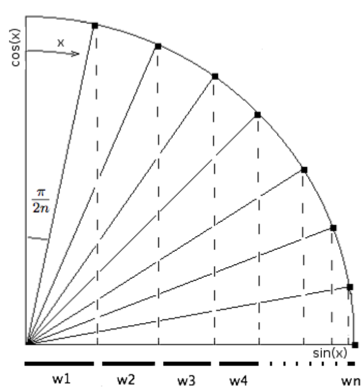
Pour transposer le résultat de l'itération de Lorenz en maximisation, l'élevation naïve de la matrice correspondant à la dominance de Lorenz en maximisation n'aboutit curieusement pas à la convergence vers un OWA, ce qui montre la particularité de l'itération de la dominance de Lorenz en minimisation.

Dans un cadre de maximisation, il faut introduire un majorant M des utilités. La maximisation d'un vecteur x est équivalente à vouloir minimiser $\tilde{x} = (M, \ldots, M) - x$, auquel on applique le critère OWA. Soit (.) une permutation triant $\tilde{x}$ par ordre décroissant (donc x par ordre croissant). On a alors :

$$w^n(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n w_i^n \tilde{x}_{(i)} = M - \sum_{i=1}^n w_i^n x_{(i)}$$

Et mimiser ce critère revient donc à maximiser le critère : $\sum_{i=1}^n w_i^n x_{(i)}$. On retombe donc sur le même jeu de poids w^n mais les composantes de x étant triées par composante croissante, il s'agit donc de maximiser un OWA dont le jeu de poids est $\tilde{w}^n = (w_n^n, \ldots, w_1^n)$, ce qui est tout à fait logique puisqu'on est dans un cadre de maximisation. Dans le cas où il n'y a pas de majorant M des utilités, on peut, pour comparer deux vecteurs, introduire le plus grand coefficient présent dans ces deux vecteurs, et on aboutit au même résultat.

Un caractéristique très intéressante des coefficients de l'OWA w^n associé à L_∞ est que leur équité peut donner lieu à une interprétation graphique : ils sont répartis régulièrement sur l'orthant positif d'un cercle trigonométrique, et ensuite projetées sur l'axe des ordonnées. On peut donc faire une interprétation graphique sous la forme d'un (quart de) camembert que l'on divise en n parts égales, et que l'on regarde de côté (projection de ces parts sur l'axe des abcisses), ce qui conforte l'idée que cet OWA w^n est particulièrement intéressant pour modéliser l'équité.



Interprétation graphique des coefficients de l'OWA w^n

4 Problèmes d'affectation équitable

Plusieurs approches algorithmiques ont été développées pour faire de l'optimisation combinatoire avec un critère d'équité, en intégrant des heuristiques et/ou des méthodes de coupe : arbre couvrants et chemins Lorenz-optimaux [2], chemins SSD-optimaux [3], ou chemins Choquet-optimaux [19], par exemple. Nous allons nous intéresser aux problèmes d'affectation multi-agents pour les critères OWA et WOWA équitables.

4.1 L'affectation équitable

Nous considérons le problème d'affectation suivant : il y a n objets à attribuer à n agents. Le coût de l'affectation de l'objet i à l'agent j est c_{ij}. On s'intéresse alors au vecteur de coûts d'une affectation pour les n agents et à son équité. En posant $C_{ij} = (0, \dots, 0, c_{ij}, 0, \dots 0)$ où c_{ij} est en position j, ces problèmes peuvent être modélisés par le programme linéaire multi-objectifs (on minimise les n composantes d'un vecteur) en variables 0-1 suivant :

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} & \\ \textit{sous contraintes :} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\ x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \end{array}$$

Proposition 11. ***(White, 1984)*** *[20]. Pour le problème d'affectation (1), toute solution Pareto-optimale minimise une somme pondérée positive des coûts des n agents.*

On s'intéresse aussi à une variante de ce problème d'affectation : chaque objet doit être affecté à un nombre d'agents compris entre c_I et c^I, et chaque agent doit avoir un nombre d'objets qui lui sont affectés compris entre c_J et c^J. Le problème se réécrit alors :

$$(2) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} & \\ \textit{sous contraintes :} & \\ c_I \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c^I & i = 1 \dots n \\ c_J \leq \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq c^J & j = 1 \dots n \\ x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \end{array}$$

Nous nous intéressons à la **recherche d'affectations OWA$_{eq}$ et WOWA$_{eq}$-optimales**. Le problème est vraissemblablement NP-difficile mais nous n'avons pas trouvé de réduction qui le prouve. Une première approche pour résoudre (1) serait d'utiliser la proposition 11.

Cependant, contrairement à ce qui se fait en bicritère, il est difficile de balayer l'espace en dimension n avec des sommes pondérées [21]. L'assurance que nous fournit la proposition 11 d'énumérer toutes les solutions OWA-optimales à l'aide de sommes pondérées positives ne nous a donc pas donné d'idée d'algorithme exploitant la structure du problème. Nous proposons une approche en programmation linéaire pour résoudre ces problèmes, en écrivant les critères OWA_{eq} et WOWA_{eq} sous la forme de de programmes linéaires.

4.2 Linéarisation des critères OWA et WOWA

Nous présentons ici une linéarisation d'un critère OWA_{eq} à minimiser, initialement introduite par Ogryczak [22]. Il est intéressant de noter que cette linéarisation n'est valable que pour les OWA équitables, ce qui rentre parfaitement dans le cadre de notre travail.

Soit un OWA équitable de jeu de poids $(w_1, \ldots, w_n)$. On a donc : $w_1 > \cdots > w_n > 0$. On rappelle qu'en posant $w' = (w_1 - w_2,\ w_2 - w_3, \ldots,\ w_{n-1} - w_n,\ w_n)$, on a $w' > 0$ et : $\text{OWA}_w(x) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)} = \sum_{i=1}^n w'_i L_i(x)$. Ainsi, à partir des composantes du vecteur de Lorenz, on peut facilement calculer le critère OWA.

L'idée est donc d'exprimer les composantes du vecteur de Lorenz à l'aide d'un programme linéaire. La composante k du vecteur de Lorenz de y est la somme des k plus grandes composantes de y. Or, dans le problème du sac-à-dos, où l'on souhaite optimiser la valeur d'objets indivisibles dans un sac à dos en respectant une contrainte de poids, dans le cas où tous les objets ont même poids, on sait que la solution relaxée optimale consiste à prendre d'abord l'objet de plus grande valeur, puis le deuxième, etc. Cela permet alors d'écrire $L_k(y)$ comme la solution du programme linéaire suivant :

$$
(3) \qquad \begin{array}{ll}
\text{Max } \sum_{i=1}^n \alpha_i^k y_i & \\
\sum_{i=1}^n \alpha_i^k = k & \\
0 \leq \alpha_i^k \leq 1 & \qquad i = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Soit, en passant au dual :

$$
(3') \qquad \begin{array}{ll}
\text{Min } k r_k + \sum_{i=1}^n b_i^k & \\
r_k + b_i^k \geq y_i & \qquad i = 1 \ldots n \\
b_i^k \geq 0 & \qquad i = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Minimiser le critère OWA s'écrit donc :

$$
(4) \qquad \begin{array}{ll}
\text{Min } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \Big(\text{Min } \big(k r_k + \textstyle\sum_{i=1}^n b_i^k\big)\Big) & \\
r_k + b_i^k \geq y_i & \qquad i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n \\
b_i^k \geq 0 & \qquad i = 1 \ldots n,\ k = 1 \ldots n
\end{array}
$$

Comme $w' > 0$, la fonction objectif (à minimiser) aura avantage à minimiser les L_k et on peut donc formuler la minimisation du critère OWA équitable comme un programme linéaire en minimisation :

$$(5)\quad \begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \left(kr_k + \sum_{i=1}^{n} b_i^k \right) & \\ r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \\ b_i^k \geq 0 & i = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \end{array}$$

Cette technique permet donc de linéariser le critère OWA$_{eq}$. Il suffit alors d'exprimer les y_i comme les composantes du vecteur coût d'un flot de (1) pour obtenir un **programme linéaire en variables mixtes (6) recherchant une affectation OWA$_{eq}$-optimale** :

$$(6)\quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w'_k \Big(kr_k + \sum_{i=j}^{n} b_j^k \Big) & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\ r_k + b_j^k \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \\ b_j^k \geq 0 & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots n \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \end{array}}$$

Cette formulation est tout à fait satisfaisante et n'ajoute aucune variable booléenne par rapport à la formulation (1). Le programme linéaire en variables mixtes (6) a n^2 variables booléennes, $n^2 + n$ variables réelles et $2n^2 + 2n$ contraintes.

Pour linéariser le critère WOWA$_{eq}$ (de fonction de déformation φ strictement concave), nous allons utiliser les résultats de duplication (2.1). On fait l'hypothèse que les poids des agents sont de la forme $\frac{d_i}{p}$. Soit $\tilde{y}$ le vecteur dupliqué associé à y. D'après les résultats de 2.1, on a : OWA$_w(\tilde{y})$ =WOWA$_\varphi(y)$ en posant $w = \left(\varphi\left(\frac{k}{p}\right) - \varphi\left(\frac{k-1}{p}\right) \right)_{k=1 \dots p}$. Or, OWA$_w$ est équitable, par stricte concavité de φ, et on peut donc lui appliquer la linéarisation précédemment exprimée pour le critère OWA$_{eq}$.

On remarque alors que pour obtenir la composante k du vecteur de Lorenz de $\tilde{y}$, (3) se réécrit directement sur y (sans dupliquer explicitement les composantes de y) en autorisant l'agent i à être pris d_i fois dans le sac-à-dos, sous la forme d'un programme linéaire (7) dont nous calculons le dual (7') :

$$(7)\quad \begin{array}{ll} \text{Max} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k y_i & \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^k = k & \\ 0 \leq \alpha_i^k \leq d_i & i = 1 \dots n \end{array} \qquad (7')\quad \begin{array}{ll} \text{Min } kr_k + \sum_{i=1}^{n} d_i b_i^k & \\ r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \dots n \\ b_i^k \geq 0 & i = 1 \dots n \end{array}$$

Le critère WOWA_{eq} peut alors s'écrire comme un programme linéaire dont la formulation est similaire à celle d'Ogryczak [23] (mais l'obtention directe grâce à la duplication) :

$$(8) \quad \begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \left(kr_k + \sum_{i=1}^{n} d_i b_i^k \right) & \\ r_k + b_i^k \geq y_i & i = 1 \dots n,\ k = 1 \dots p \\ b_i^k \geq 0 & i = 1 \dots n,\ k = 1 \dots p \end{array}$$

On en déduit un **programme linéaire en variables mixtes (9) recherchant une affectation WOWA_{eq}-optimale**

$$(9) \quad \boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} w'_k \Big(kr_k + \sum_{i=1}^{n} d_j b_j^k \Big) & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1 \dots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1 \dots n \\ r_k + b_j^k \geq \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots p \\ b_j^k \geq 0 & j = 1 \dots n,\ k = 1 \dots p \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1 \dots n,\ j = 1 \dots n \end{array}}$$

Cette formulation a n^2 variables booléennes, $np + p$ variables réelles, et $2np + 2n$ contraintes. Nous avons donc linéarisé les critères OWA_{eq} en (5) et WOWA_{eq} en (8) et les problèmes d'optimisation de ces critères pour le problème d'affectation en (6) et (9).

4.3 Deux problèmes réels modélisés par des affectations équitables

Nous allons maintenant modéliser deux problèmes réels sous la forme de problèmes d'affectation équitable multi-agents : le "paper assignment problem" et la mise en relation équitable des membres d'un site de rencontre.

Le **"paper assignement problem"** (PAP) est un exemple concret directement issu du monde de la recherche. Lors d'une conférence internationale, des centaines de papiers doivent être reviewés. Il faut donc choisir, pour chaque papier, un certain nombre de reviewers qui aient les compétences et le temps de mener pour bien cette tâche. On supposera que chaque papier doit avoir exactement 3 reviewers et qu'un chercheur peut reviewer au plus 5 papiers dans une conférence. On supposera également qu'il y a autant de papiers que de reviewers (mais on peut très bien modéliser aussi le problème sans faire cette hypothèse et exploiter notre formulation).

On s'intéresse au problème suivant : comment attribuer, si c'est possible, 3 reviewers compétents à chaque papier, tout en faisant en sorte que chaque chercheur ne passe pas trop de temps à reviewer ? Il ne s'agit donc pas ici de minimiser le temps de travail total des chercheurs, mais d'être équitable pour l'ensemble des chercheurs au niveau de la répartition de la charge horaire. PAP se modélise donc comme le problème (2) avec $c_I = c^I = 3$, $c_J = 0$ et $c^J = 5$, et c_{ij} répresente le temps que le chercheur j prendrait pour reviewer le papier i (on pose $c_{ij} = +\infty$ si le reviewer n'est pas jugé compétent). Une échelle de 1 à 5 semble raisonnable pour estimer la difficulté à reviewer un article.

Bien entendu, lorsque l'on écrit le problème sous la forme du programme linéaire en variables mixtes (6), on n'écrit pas les x_{ij} correspondant à un coût infini. On fait l'hypothèse que chaque reviewer est en moyenne compétent pour d% des papiers de la conférence et la matrice de coûts est donc creuse, de densité d (c'est-à-dire qu'en moyenne, d% de ses coefficients seulement sont définis, les autres étant infinis).

Il s'agit de rechercher une affectation OWA$_{eq}$-optimale pour le problème ainsi modélisé. Si l'on considère que les chercheurs n'ont pas tous la même importance (est-ce politiquement correct ?), on peut également rechercher une affectation WOWA$_{eq}$-optimale. L'intérêt de notre approche est donc de rechercher une solution qui soit équitable pour les chercheurs, et qui assure une répartition de la charge de travail.

Le deuxième problème auquel nous allons nous intéresser est la **mise en relation équitable des membres d'un site de rencontres**. Un site de rencontre possède des membres qui font connaissance par le biais d'Internet. L'entreprise s'engage à mettre en relation chacun de ses membres, une fois par mois, avec une liste de personnes (entre 5 et 10) qui répondent à ses critères et aux critères desquelles il répond (il faut donc que la mise en relation concerne des membres mutuellement intéressés). Le problème pour l'entreprise est de trouver une liste de mises en relation qui satisfasse au mieux l'ensemble de ses clients et leur permette de maximiser leurs chances de rencontres fructueuses.

Le problème se modélise comme (2) avec pour capacités $c_I = c_J = 5$, $c^I = c^J = 10$. On a également $x_{ij} = x_{ji}$ qui correspond à la mise en relation des personnes i et j (on ne définit donc les variables x_{ij} que pour $i < j$). Pour définir c_{ij} (pour $i < j$), on s'intéresse à deux aspects : est-ce que i s'éloigne beaucoup des critères de j (coût c'_{ij}), et est-ce que j s'éloigne beaucoup des critères de i (coût c'_{ji}). On combine alors ces deux critères pour définir le coût de la rencontre entre i et j, par un opérateur max par exemple, ou plus généralement par un critère OWA équitable w qui agrège ces deux coûts. On a donc : $c_{ij} = w(c'_{ij}, c'_{ji})$ pour $i < j$. Compte-tenu de l'importance de certains critères (sexe, âge, ville par exemple), la matrice des coûts est creuse et de faible densité (ce qui est algorithmiquement très intéressant) : lorsque i et j sont incompatibles, on pose $c_{ij} = +\infty$. Compte-tenu de l'imprécision de ce coût, on l'exprime sur une échelle de 1 à 20 (ce qui correspond à l'échelle standard de notation scolaire).

Un inconvénient de cette modélisation est qu'elle suppose que les insatisfactions de chaque membre sont additives. Par exemple, un membre mis en relation avec 5 autres membres pour des coûts de 10, 10, 10, 10, 10 sera au même niveau d'insatisfaction (50) qu'un autre membre dont les coûts sont 1, 1, 8, 20, 20. Le second peut cependant paraître mieux loti (c'est discutable) puisque deux personnes semblent lui convenir parfaitement.

4.4 Expérimentations numériques

Nous utilisons ILOG CPLEX 11.100 sur un PC (sous Linux) doté de 4 Go de mémoire vive et d'un processeur Intel(R) Core(TM)2 @ 2.66GHz. Les temps obtenus sont des moyennes sur 20 instances. Nous utilisons les critères OWA et WOWA issus de l'itération de la dominance de Lorenz (définis en 3.3) avec 10 décimales (le nombre de décimales n'a pas d'influence significative sur les temps de résolution). Lorsqu'une pondération des n agents est nécessaire, on prend $p = 10n$ et on tire des poids aléatoires.

Nous présentons les performances des linéarisations (6) et (9) des critères OWA et WOWA sur trois problèmes : l'affectation équitable, le "paper assignment problem" et la mise en relation équitable des membres d'un site de rencontres. Dans le cadre de ces problèmes, des solutions 0.01% approchées sont largement acceptables et c'est le seuil de tolérance que nous avons paramétré dans CPLEX (qui a cependant retourné la plupart du temps la solution exacte). Les temps t dans les tableaux sont exprimés en secondes.

n =	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
temps (crit. OWA)	.04	.38	1.45	3.12	5.13	14.7	73.8	122	275	-
temps (crit. WOWA)	.15	1.70	10.8	47.4	77.2	320	-	-	-	-

TAB 1 – Recherche d'une affectation équitable, coûts dans $[\![1; 1000]\!]$

n =	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
temps (crit. OWA)	.98	2.37	10.6	23.0	32.4	57.7	84.5	158	227	?
temps (crit. WOWA)	11.4	52.4	197	-	-	-	-	-	-	-

TAB 2 – Recherche d'une affectation équitable, coûts dans $[\![1; 20]\!]$

n =	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250
temps (tol. 1%)	0.02	0.31	1.04	3.52	5.93	14.6	46.71	66.2	184	381
temps (tol. 0.01%)	0.17	1.32	24.6	239	-	-	-	-	-	-

TAB 3 – Mise en relation équitable pour le critère OWA,
coûts dans $[\![1; 20]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

n =	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200
temps	.23	1.58	4.80	10.1	20.5	37.3	57.3	92.9	151	222	361	-

TAB 4 – Paper Assignment Problem pour le critère OWA,
coûts dans $[\![1; 5]\!]$ et matrices creuses (de densité 20%)

Ces résultats expérimentaux montrent bien que les temps de résolution des problèmes d'affectation équitable sont très variables en fonction des nombreux paramètres que l'on peut faire varier conjointement :

- le nombre d'agents considérés
- le critère choisi (il est plus difficile d'optimiser WOWA qu'OWA)
- l'intervalle de génération des coûts
- la densité de la matrice des coûts
- les valeurs de c_I, c^I, c_J, c^J. A paramètres égaux (par exemple n=100, coûts entre 1 et 5 et densité de 20), PAP est 100x plus rapide que le problème de mise en relation (qui arrive pourtant aussi vite que PAP à moins de 1% de l'optimal, puis stagne).

Pour illustrer l'intérêt du critère OWA par rapport à la moyenne des coûts, nous montrons sur une instance aléatoire les résultats retournés par CPLEX pour le problème (1) et la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & (4) & 9 & 7 \\ 1 & (3) & 2 & 7 & 8 \\ (3) & 9 & 2 & 9 & 5 \\ 10 & 1 & 3 & (3) & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 7 & (3) \end{pmatrix}$$

CPLEX nous renvoie comme solution OWA-optimale $(3,3,4,3,3)$ correspondant à la permutation (.), et de coût total 16. Si on optimise la somme des coûts, la solution optimale est alors $(1,1,2,3,7)$ de coût total 14, qui présente des coûts très inégaux.

Pour finir, voici une illustration de l'influence des poids des agents pour le critère WOWA sur le problème d'affectation équitable, pour 5 agents pondérés de poids $w_1 = 0.06$, $w_2 = 0.12$, $w_3 = 0.20$, $w_4 = 0.30$, $w_5 = 0.32$, avec des coûts dans $[\![1;10]\!]$ et une matrice aléatoire :

$$\begin{pmatrix} 7 & (2) & 4 & [8] & 4 \\ (5) & 9 & 8 & 3 & [2] \\ [6] & 6 & 5 & 8 & (4) \\ 6 & 10 & [6] & (2) & 8 \\ 9 & [3] & (3) & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

CPLEX nous renvoie comme solution WOWA-optimale $(2,5,4,2,3)$ correspondant à la permutation (.). Si on choisit de donner plus de poids à l'agent 2 avec pour nouvelle pondération des agents $w'_1 = 0.06$, $w'_2 = 0.32$, $w'_3 = 0.20$, $w'_4 = 0.30$, $w'_5 = 0.12$, on obtient la solution $(8,2,6,6,3)$ (correspondant à la permutation [.]), ce qui confirme l'importance accrue de l'agent 2, qui est mieux loti qu'auparavant.

Conclusions et perspectives

Après avoir formalisé l'équité et introduit un modèle générique pour les problèmes multi-agents, nous avons dressé un panorama des critères de décision équitables : la dominance de Lorenz et OWA_{eq} dans le cas non pondéré, qui ont pour pendant SSD et WOWA_{eq} dans un cadre pondéré. Nous avons ensuite généralisé l'interprétation d'un OWA équitable comme une somme pondérée positive dans l'espace de Lorenz et montré que WOWA et l'intégrale de Choquet peuvent s'interpréter de la même façon dans le cas pondéré.

La recherche d'un critère par défaut pour modéliser l'équite (en l'absence d'information préférentielle permettant de choisir a priori un jeu de poids) nous a amené à itérer la dominance de Lorenz, procédé convergeant, comme nous l'avons montré, vers un critère OWA équitable. Nous nous sommes enfin attachés à la résolution du problème d'affectation multi-agents équitable, en le formulant comme un programme linéaire en variables mixtes (après avoir linéarisé les critères OWA et WOWA équitables), formulation dont nous avons testé l'efficacité sur différents problèmes d'affectation équitable.

Les perspectives de recherche sont nombreuses. Du point de vue théorique, il reste à :
- axiomatiser l'itération de Lorenz d'ordre infini
- prouver le caractère NP–difficile (présumé) de la recherche d'affectation OWA-optimale
- isoler des sous-problèmes polynomiaux (e.g. coûts bornés ou matrices creuses ?)

Sur le plan pratique, l'approche par programmation linéaire que nous avons développée montre ses limites, en particulier sur le critère WOWA. Il serait judicieux de développer d'autres approches pour pouvoir comparer les performances. Dans cette optique, deux pistes nous paraissent particulièrement intéressantes :
- approximer le front de Pareto [24] puis générer une solution équitable approchée
- utiliser la proposition 11 pour obtenir des bornes dans un Branch & Bound.

Enfin, on peut remarquer que cette approche par programmation linéaire en variables mixtes pour rechercher des solutions OWA ou WOWA-optimales peut s'appliquer à d'autres problèmes que l'affectation, comme par exemple :
- les chemin multicritères
- les flots multicritères (ce qui englobe chemins et affectations)
- l'arbre couvrant multicritère pour un graphe planaire (ce qui assure une modélisation par un programme linéaire de taille linéaire en l'instance [25])
- l'arbre couvrant monocritère pour un graphe planaire, en optimisant l'équité des n coûts des arrêtes choisies (approche qui s'étend à tout problème monocritère linéarisable dont les solutions ont une taille constante).

Beaucoup reste donc à faire, en particulier du point de vue algorithmique, mais nos résultats définissent un cadre théorique solide pour l'optimisation combinatoire équitable et permettent déjà de résoudre des problèmes concrets comme le *paper assignment problem*.

Annexes

A - Définitions de l'équité

B - Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

C - Liens entre critères de décision et formulations équivalentes de WOWA

D - Diagonalisation de L

E - Preuve de convergence de L^k vers un OWA

A - Définitions de l'équité

L'*équité* est une notion commune à de nombreuses disciplines auxquelles correspondent autant de définitions différentes. C'est un sentiment naturel et spontané de ce qui est "juste" ; elle correspond à l'idée que chacun a le traitement de ce qui lui revient de droit intrinsèque, mais selon son mérite. Le fait de faire intervenir le mérite en fait donc une notion différente de l'égalité (on peut parler d'une *égalité pondérée*).

Un premier sens de la notion d'équité se rencontre chez Aristote : le terme intervient alors dans le cadre d'une réflexion sur la loi et ses conditions d'application. La notion d'équité telle qu'elle est employée aujourd'hui dans le discours public et notamment dans les argumentaires politiques renvoie à un autre cadre théorique : celui qu'a contribué à définir le philosophe John Rawls. Cette notion désigne alors le souci d'organiser la coopération sociale selon des principes qui tiennent compte des éventuelles disparités entre les membres d'une même société : c'est le sens des principes de la justice tels que les définit Rawls. Selon Le Petit Robert, l'équité est une "notion de justice naturelle dans l'appréciation de ce qui est dû à chacun".

L'équité intervient dans de nombreux domaines (philosophie, morale, sociologie, politique, économie, droit, etc). En matière politique ou économique, l'équité est le principe qui conduit à minimiser des inégalités que subissent des personnes ou des groupes défavorisés (exemple : le commerce équitable). En matière sociale, une répartition équitable ne correspond pas à l'égalité au sens strict. C'est une "juste mesure", un équilibre, qui permet de rendre acceptable une forme d'inégalité lorsque l'égalité ne serait pas acceptable. En droit, l'équité est le principe modérateur du droit objectif (lois, règlements administratifs) selon lequel chacun peut prétendre à un traitement juste, égalitaire et raisonnable.

C'est en économie que l'approche de l'équité est la plus proche de notre problématique multi-agents. En effet, l'économie s'attache à l'étude de la répartition équitable (et non pas seulement égalitaire) de richesse entre les individus. A ce titre, de nombreux indices numériques ont été proposés pour pouvoir comparer des distributions de valeurs (revenus, coûts) sur un ensemble d'individus. On peut citer, par exemple, la dominance de Lorenz ou les indices de Gini.

L'intérêt de cette étude sémantique est de mieux comprendre et justifier les modélisations que nous avons faites de l'équité.

B - Modélisation des problèmes d'optimisation multi-agents

Nous étudions uniquement les problèmes multi-agents définis sur des graphes. Mais la valuation de chaque arc est-elle monocritère ou multicritère, et quel sens lui accorder ? C'est un aspect fondamental du problème qui est très perturbant de prime abord : sous quelle forme se présente le problème et comment obtenir le vecteur pondéré des coûts à partir de ce problème, sachant que les solutions ne sont pas définies explicitement ?

Puisque l'enjeu est de faire de l'optimisation combinatoire, il faut que les solutions soient définies en intention. Ce constat simple nous amène à nous poser la question de comment s'exprime une solution à partir des arcs valués qui la composent. Comment obtenir le vecteur coût final des agents en fonction des coûts de chaque arc et exploiter le procédé dans le cadre de l'optimisation combinatoire ? On pourrait très bien considérer que ces valeurs, des ordres de grandeurs, se combinent avec un opérateur max, ce qui complexifierait considérablement le problème. Comme souvent en optimisation combinatoire, nous souhaitons faire l'hypothèse qu'une solution est valuée par la somme des valuations des arcs qui la composent. C'est le cas dans de nombreux problèmes (mais pas tous).

Dès lors, il reste deux solutions pour obtenir un vecteur des coûts de chaque agent au final : soit la valuation de chaque arc est de cette forme, soit chaque arc est valué par un réel et la valeur finale d'une solution est réinterprêtée par chaque agent en fonction d'une fonction d'utilité. Nous retenons la première solution (la deuxième ayant un intérêt modéré, puisqu'en général les utilités des agents seront croissantes et il suffira de minimiser le problème monocritère sur le graphe sans se soucier du caractère multi-agents ni de l'équité qui en découlera ou il faudrait alors avoir une valuation multicritère de chaque arc et appliquer au final n fonctions d'utilité des agents ce qui est trop complexe). Comment chaque agent va-t-il s'exprimer sur les solutions de chaque arc ? Il ne peut pas donner l'utilité de chaque arc, sinon ça suppose qu'elle est additive (très restrictif). Il est donc pertinent d'avoir des données brutes additives sur chaque arc et d'être capable de modéliser le comportement de chaque agent pour s'exprimer sur la solution.

Il faut faire en plus l'hypothèse que le coût pour chaque agent est additif, ce qui peut paraître très contraignant si on le voit comme une utilité. En fait, c'est nettement moins gênant s'il s'agit d'une valeur intrinsèquement additive (un temps, une longueur, etc).

Une modélisation s'impose donc : le problème est représenté par un graphe sur lequel sont définies des solutions en intention (chemin, arbre couvrant, flot, couplage, etc). Chaque arc est valué par un vecteur dont la k^{e} composante représente le coût pour l'agent k de l'arc et ces coûts sont additifs pour les agents. Le vecteur coût d'une solution est donc la somme des vecteurs coûts des arcs qui la composent. Ces hypothèses s'avèrent finalement peu restrictives et naturelles (une fois qu'elles sont énoncées clairement et simplement) et couvrent la plupart des problèmes classiques. Nous avons une modélisation satisfaisante par sa généricité et utilisable pour faire de l'optimisation combinatoire.

C - Liens entre critères de décision et formulations équivalentes WOWA

On a montré que :
- SSD étend Lorenz au cadre pondéré
- WOWA étend OWA au cadre pondéré
- OWA_{eq} prolonge Lorenz (donc SSD) dans le cas d'agents non pondérés
- WOWA_{eq} prolonge SSD dans le cas d'agents pondérés de masses additives
- $\mathrm{Choquet}_{eq}$ prolonge SSD dans le cas d'agents pondérés de masses quelconques.

Nous proposons également une démonstration de la proposition 4. Soit un critère WOWA de fonction de déformation φ deux fois dérivable. Soit x un vecteur pondéré. Dans le cas discret, on a par définition :

$$\mathrm{WOWA}_{\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{n} \big(\varphi(X \geq x_{(i)}) - \varphi(X > x_{(i)})\big) x_{(i)}.$$

En exprimant $\int_{x=0}^{1} \varphi'(x)\check{G}(x)dx$ aux points de rupture de $\check{G}$, on obtient immédiatement la formule précédente (cf 2.3).

On a enfin : $\int_{x=0}^{1}$ -$\varphi''(x)\check{G}^2(x)dx$
$= \int_{x=0}^{1}$ -$\varphi''(x) \int_{t=0}^{x} \check{G}(t)dtdx$
$= \int_{x=0}^{1} \int_{t=0}^{x}$ -$\varphi''(x)\check{G}(t)dtdx$
$= \int_{t=0}^{1} \int_{x=t}^{1}$ -$\varphi''(x)\check{G}(t)dtdx$
$= \int_{t=0}^{1} \check{G}(t)dt \int_{x=t}^{1}$ -$\varphi''(x)dx$
$= \int_{t=0}^{1} \check{G}(t)\varphi'(x)dtdx$

φ' joue donc le rôle d'une densité de poids. □

D - Diagonalisation de L

L est une matrice symétrique réelle : le théorème spectral en dimension finie nous permet d'affirmer que L est diagonalisable, avec une matrice de passage orthogonal. En fait, il est possible d'exprimer les valeurs et vecteurs propres de L en dimension n (ce qui n'est pas forcément évident de prime abord).

On remarque que : $L^2 = (\inf(i,j))$ (ce qui peut d'ailleurs peut-être aider à interprêter L^2, Lorenz de Lorenz). De cette remarque, on déduit que $L^2 > 0$, ce qui, par le théorème de Perron-Frobenius, permet d'en déduire pour L^2 (et donc pour L) que la valeur propre de module maximal est strictement positive, de multiplicité 1, et qu'elle possède un vecteur propre dont les composantes sont strictement positives. Mais cela ne nous suffit pas pour montrer la convergence vers l'ordre associé au préordre W_1 ; en effet, on veut montrer que les modules de toutes les valeurs propres sont 2 à 2 distincts. L'utilisation de ces théorèmes ne nous permet pas de conclure et nous allons donc diagonaliser L. Pour ce faire, on cherche une puissance de L que l'on saurait diagonaliser. On calcule son inverse :

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & -1 & 1 \\ & \iddots & \iddots & \\ -1 & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ dont le carré est : } L^{-2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose alors } A = 2\ \mathrm{Id} - L^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est proche de formes classiques pour la diagonalisation (calcul des valeurs et des vecteurs propres). Appelons V_t le vecteur dont les n composantes sont : $\sin(t), \sin(2t), \ldots \sin(nt)$. Alors, en remarquant que $\sin(kt) + \sin((k+2)t) = 2\sin((k+1)t)\cos(t)$, on a :

$AV_t = 2\cos(t)V_t + (\sin(nt) - \sin((n+1)t))e_n$. Donc si $\sin(nt) - \sin((n+1)t) = 0$, alors $2\cos(t)$ est une valeur propre, et V_t est un vecteur propre.

Or, pour $t = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$ $(k = 0 \ldots (n-1))$, on a : $\sin(nt) = \sin((n+1)t)$ car $nt + (n+1)t = (2n+1)t = \pi + 2k\pi$ et les deux angles, complémentaires à π, ont donc même sinus.

Les n valeurs propres de A sont donc : $2\cos((2k+1)w)$ pour $k = 0 \ldots (n-1)$, avec pour vecteur propre associé $(\sin((2k+1)w),\ \sin(2(2k+1)w),\ \ldots\ \sin(n(2k+1)w))$. A admet donc n valeurs propres dans $]0; 2[$, de modules 2 à 2 distincts. Or, il n'est pas difficile, à partir des valeurs propres de A, de trouver celles de L (et les vecteurs propres seront les mêmes).

Pour a valeur propre de A (donc $a < 2$), $2 - a$ est valeur propre de L^{-2} (puisque $A = 2\ \mathrm{Id} - L^{-2}$), et donc $\frac{1}{\sqrt{2-a}}$ est le module d'une valeur propre de L ; puisque les valeurs propres de A sont 2 à 2 distinctes et que la fonction de transformation des valeurs propres de A à L est injective croissante, les modules des valeurs propres de L sont 2 à 2 distincts (ce qui prouve le lemme 1).

Les coefficients de W_1 sont donc : $\sin(w), \cdots, \sin(nw)$ (ce qui prouve le lemme 3), puisqu'il s'agit du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de L (donc de A).

Remarque : les n valeurs propres de L sont, pour $k = 0 \ldots (n-1)$: $\lambda_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2\sin(\frac{(2k+1)w}{2})}$ avec pour vecteur propre associé $V_{k+1} = (\sin((2k+1)w),\ \sin(2(2k+1)w),\ \ldots\ \sin(n(2k+1)w))$.

E - Preuve de convergence de L^k vers un OWA

Preuve du lemme 2. (équivalent de L^k et $A_1 > 0$).

Comme λ_1 est l'unique valeur propre de module maximal, il suffit de montrer que $A_1 > 0$ pour prouver le lemme 1 (car $\lambda_i^k = o(\lambda_1^k)$ pour $i > 1$). L'inégalité $A_1 > 0$ est un corollaire de la section "Diagonalisation de L" (en exhibant un vecteur propre associé à λ_1), mais nous en proposons ici une démonstration directe.

Etant donné que $L^k \geq 0$ pour tout k, les coefficients de A_1 sont positifs au sens large (si l'un était strictement négatif, cela contredirait la positivité des coefficients des puissances de L). Donc, comme $A_1 = {}^tP_1P_1$, les composantes de P_1 sont du même signe (on peut supposer qu'elles sont positives, quitte à changer P en -P).

Lemme 6. *Dans L^k pour $k > 0$, les coefficients sont croissants de haut en bas et et de gauche à droite*

Preuve élémentaire (par récurrence). On en déduit immédiatement la même propriété pour A_1 (sinon, le lemme ne serait pas vérifié pour k suffisamment grand).

Ainsi, si A_1 a un coefficient nul, son coefficient en (1,1) est également nul. Comme $A_i = {}^tP_iP_i$, on en déduit immédiatement que $a_{1,n} = 0$.

En calculant $L^{k+1} = L.L^k$, et en passant aux équivalents, on a : $a_{n,n} = \lambda_1 a_{1,n} = 0$. Donc $A_1 = 0$ par le lemme (puisque $a_{n,n}$, le plus grand coefficient, est nul), et donc $P_1 = 0$, ce qui est impossible puisque P est inversible. Contradiction ! Donc, $A_1 > 0$ et $P_1 > 0$. Puisque $\lambda_i^k = o(\lambda_1^k)$ pour $i > 1$ et $A_1 > 0$, on a l'équivalent recherché. □

Preuve du Lemme 4. (2 vecteurs distincts de même W_1 sont incomparables pour L^∞).

A W_1 égaux, l'équivalent que nous avons de l'itération de Lorenz ne permet pas de discriminer x et y et il faut dont passer aux ordres suivants pour trancher (en effet, rien ne nous permet d'affirmer directement que L^∞ n'est pas plus discriminant que W_1).

On a montré que $P_1 > 0$. Or, ${}^tPP = Id$. D'où : pour $i > 1$, ${}^tP_1P_i = 0$. Comme $P_i \neq 0$ (car P est inversible), P_i a nécessairement un coefficient > 0 et un autre < 0. Or $W_1(x) = W_1(y)$, donc : $L^k(y) - L^k(x) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^k \, {}^tP_iP_i(y-x)$.

Si on veut qu'il y ait dominance de Lorenz à un certain ordre k entre x et y, il faut $L^k(y) - L^k(x) \geq 0$. Soit j le plus petit indice tel que $P_j(y-x) \geq 0$ (on suppose qu'un tel indice existe). Alors : $L^k(y) - L^k(x) \sim \lambda_j^k \, {}^tP_j(P_j(y) - P_j(x))$ qui a des composantes > 0 et d'autres < 0, et il n'y a donc pas dominance de Pareto. Pour qu'il y ait dominance de Pareto, il faut donc que $P_i(y-x) = 0$ pour tout i, c-à-d $P(y-x) = 0$; d'où $x = y$ car P est inversible. Deux vecteurs distincts de même W_1 sont donc bien incomparables par l'itération infinie de la dominance de Lorenz. □

Références

[1] Thibault Gajdos. Les fondements axiomatiques de la mesure normative des inégalités. Post-print, HAL, 2001.

[2] P. Perny, O. Spanjaard, and L.-X. Storme. A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graphs. *Annals of Operations Research*, 147(1) :317–341, October 2006.

[3] Patrice Perny, Olivier Spanjaard, and Louis-Xavier Storme. State space search for risk-averse agents. In Manuela M. Veloso, editor, *IJCAI*, pages 2353–2358, 2007.

[4] H. Peyton Young. *Equity in Theory and Practice*. Princeton, 1994.

[5] Hervé J. Moulin. *Fair division and collective welfare*. The MIT Press, 2003.

[6] Sylvain Bouveret. *Allocation et partage équitables de ressources indivisibles : modélisation, complexité et algorithmique*. PhD thesis, ENSAE, Toulouse, France, November 2007.

[7] Ulle Endriss, Nicolas Maudet, Fariba Sadri, and Francesca Toni. Negotiating socially optimal allocations of resources. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 25 :315–348, 2006.

[8] Leonard J. Savage. *The foundations of statistics*. 1954.

[9] M. O. Lorenz. Methods of measuring the concentration of wealth. *Publications of the American Statistical Association*, 9(70) :209–219, 1905.

[10] Anthony F Shorrocks. The impact of income components on the distribution of family incomes. *The Quarterly Journal of Economics*, 98(2) :311–26, May 1983.

[11] Anthony F Shorrocks. Ranking income distributions. *Economica*, 50(197) :3–17, February 1983.

[12] Oskar Morgenstern and John Von Neumann. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, May 1944.

[13] J. Silber (Ed.). *Handbook of Income Inequality Measurement*, chapter 6. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[14] Mark J Machina and John W Pratt. Increasing risk : Some direct constructions. *Journal of Risk and Uncertainty*, 14(2) :103–27, March 1997.

[15] Vicenç Torra. The weighted OWA operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 12 :153–166, 1997.

[16] Menahem E Yaari. The dual theory of choice under risk. *Econometrica*, 55(1) :95–115, January 1987.

[17] David Schmeidler. Subjective probability and expected utility without additivity. *Econometrica*, 57(3) :571–87, May 1989.

[18] Peter C. Fishburn. Stochastic dominance and moments of distributions. *Mathematics of Operations Research*, 5(1) :94–100, 1980.

[19] Lucie Galand, Patrice Perny, and Olivier Spanjaard. Optimization of the choquet integral in multicriteria combinatorial problems. In *19th International Conference on Multiple Criteria Decision Making*, 1 2008.

[20] D.J. White. A special multi-objective assignment problem. *Journal of the Operational Research Society*, 35 :759–767, 1984.

[21] J. Philip. Algorithms for the vector maximization problem. *MP*, 2 :207–229, 1972.

[22] Wlodzimierz Ogryczak and Tomasz Sliwinski. On solving linear programs with the ordered weighted averaging objective. *European Journal of Operational Research*, 148(1) :80–91, July 2003.

[23] Wlodzimierz Ogryczak and Tomasz Sliwinski. On decision support under risk by the wowa optimization. In Khaled Mellouli, editor, *ECSQARU*, volume 4724 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 779–790. Springer, 2007.

[24] Patrice Perny and Olivier Spanjaard. Near admissible algorithms for multiobjective search. In *18th European Conference on Artificial Intelligence ECAI-08*, pages 490–494. IOS Press, 2008.

[25] Justin C. Williams. A linear-size zero - one programming model for the minimum spanning tree problem in planar graphs. *Networks*, 39(1) :53–60, 2002.