# Problèmes de monotonie dans les procédures de rangement procédant par choix itérés

Boris Golden

11 février 2008

sujet d'Initiation à la Recherche, avec Patrice Perny

**Résumé**

Nous nous intéressons aux problèmes de monotonie dans les rangements procédant par choix itérés. Dans une première partie, nous introduisons les définitions essentielles, le formalisme et les principaux paradoxes et résultats négatifs en théorie du choix social, avant de définir les procédures de rangement procédant par choix itérés. Dans la seconde partie, nous présentons et analysons plusieurs résultats, positifs et négatifs, concernant la monotonie de telles procédures, avant de les étendre aux raffinements progressifs. Dans la dernière partie, nous nous intéressons plus particulièrement à des résultats positifs obtenus dans le cas de tournois et à leurs applications pour prouver la monotonie faible de nouveaux rangements par choix itérés, mais aussi pour nuancer la perspective de résultats généraux.

*Remarque : les résultats signalés par * et les annexes sont propres à ce document.*

Université Pierre et Marie Curie (France)

# Table des matières

# 1 Introduction

La théorie du choix social, qui couvre de nombreux domaines, vise à prendre une décision à l'échelle collective lorsque des individus (ou plus généralement des entités) ont exprimé leurs préférences. Dans ce cadre, on peut s'intéresser à la sélection de l'ensemble des alternatives préférées par le groupe (c'est un choix), ou au classement collectif de toutes les alternatives possibles (on parle alors de rangement).

Une idée simple, pour obtenir un rangement, consiste à itérer le choix des meilleurs éléments à chaque étape sur les alternatives non classées : on parlera de procédures de rangement procédant par choix itérés. Cette approche a pour avantage de modéliser fidèlement la division de processus de décision en étapes successives. De tels procédés sont utilisés dans le logiciel Electre III, dans certains processus de décision automatisés, mais aussi par des comités humains : par exemple, la nomination d'un professeur d'université, ou l'élimination successive des candidats dans certains concours (notamment dans les jeux de télé-réalité, ce qui montre que le procédé est répandu).

Une propriété naturelle et essentielle que l'on peut exiger d'une procédure de rangement itérative est qu'elle soit monotone, c'est-à-dire que l'amélioration de la popularité d'un candidat ne puisse pas le défavoriser dans le rangement final. Malheureusement, de nombreux exemples négatifs viennent ternir le tableau. L'objectif de ce document est de synthétiser divers résultats obtenus, en présentant les négatifs, puis en insistant sur les résultats positifs pour caractériser les procédures de choix dont résultent des rangements itérés monotones. Nous établissons aussi un lien formel entre les deux façons d'obtenir un rangement en itérant une procédure de choix (rangement par raffinement progressif et procédure de rangement itérative) pour transposer les résultats entre ces deux types de procédures.

Dans une première partie, nous introduisons les définitions essentielles, le formalisme et les principaux paradoxes et résultats négatifs en théorie du choix social, avant de définir les procédures de rangement procédant par choix itérés. Dans la seconde partie, nous présentons et analysons plusieurs résultats, positifs et négatifs, concernant la monotonie de telles procédures, avant de les étendre aux raffinements progressifs. Dans la dernière partie, nous nous intéressons aux résultats dans le cas des tournois et à leurs applications pour prouver la monotonie faible de nouveaux rangements par choix itérés, mais aussi pour nuancer la perspective de résultats généraux.

# 2 La théorie du choix social

## 2.1 Présentation

La théorie du choix social s'intéresse à une problématique présente dans de nombreux domaines : définir les préférences collectives à partir d'un jeu de préférences individuelles . On parle d'*agrégation* de préférences. Les premiers résultats marquants nous viennent de Borda (1781) et Condorcet (1785), dans le cadre de la théorie du vote. Au XX$^{ème}$ siècle, Arrow et Sen sont à l'origine de résultats essentiels dans ce domaine.

Toute la richesse de cette problématique réside dans le fait que, bien souvent, il n'y a pas de solution "évidente et logique" ou totalement satisfaisante au problème d'agrégation. Il faut donc faire des choix, selon l'enjeu des décisions à prendre et les propriétés que l'on souhaiterait que l'agrégation vérifie. La politique, l'économie, la théorie de la décision, ou l'intelligence artificielle sont autant de domaines dans lesquels la théorie du choix social est présente.

Plutôt que de chercher à classer toutes les préférences au niveau collectif, il est fréquent de s'intéresser uniquement aux alternatives préférées au niveau collectif : on parle alors de *choix*, ce qui correspond également au terme générique de vote. Lorsque l'on veut classer exhaustivement toutes les alternatives au niveau collectif par un préordre total, on parle de *rangement*.

Bien entendu, il existe de nombreuses façons de représenter les préférences des individus (de manière ordinale ou numérique, par exemple), mais aussi, par exemple, en n'imposant pas la transitivité (ce qui peut s'avérer nécessaire dans certaines situations, notamment par exemple si leurs préférences s'appuient sur une décision multicritère). Nous nous attacherons exclusivement au cas classique où chaque individu est capable de classer les alternatives de la meilleure à la pire, avec d'éventuelles ex-aequos, ce qui n'est pas très restrictif dans la plupart des situations modélisées (mais il se peut que l'on ait des données numériques plus précises, auquel cas on aura intérêt à passer à des manières plus informatives et fines d'exprimer les préférences).

## 2.2 Formalisme et définitions

Nous allons introduire les principales définitions et le formalisme utilisé pour l'agrégation de préférences dans la suite de ce document.

On fixera un ensemble d'individus (ou votants) N = {1, ... , n} dont on veut agréger les préférences, définies pour un ensemble d'alternatives (ou de candidats) X. Ces préférences sont regroupées dans un *profil* $\pi = (\geq_1, ..., \geq_n)$ et l'on note $\Pi(A)$ l'ensemble des profils sur $A \subseteq X$. On se place dans le cas où $|X| \geq 3$ (lorsqu'il n'y a que 2 candidats, il s'agit d'un référendum, et le problème de la monotonie est alors trivial). Les préférences $\geq_i$ sont des préordres totaux sur X. Tout préordre total est décomposable en un ordre strict partiel $>_i$ et une relation d'équivalence $\sim_i$, que l'on interprète ainsi : $a >_i b$ signifie que l'individu i préfère strictement $a$ à $b$, et $a \sim_i b$ qu'il est indifférent entre $a$ et $b$. Pour toute partie A non vide de X, on note $\pi_{|A}$ le profil correspondant aux préférences du profil $\pi$ restreintes à A. On appelle profil inverse et l'on note $\pi^{-1}$ le profil $(\geq_1^{-1}, ..., \geq_n^{-1})$ qui correspondant au "retournement" des n graphes de préférences des individus. On a : $(\pi^{-1})^{-1} = \pi$. Pour un préordre total, le retournement d'une préférence consiste simplement à inverser l'ordre des éléments dans le classement, en gardant les ex-aequos s'il y en a.

Voici un exemple de profil $\pi$ et de son inverse, dans le cas où il y a 7 votants et 3 candidats.

$$(E1) \quad \pi = \begin{cases} 3\times & x > y > z \\ 2\times & y > x \sim z \\ 2\times & z > y > x \end{cases} \qquad (E2) \quad \pi^{-1} = \begin{cases} 3\times & z > y > x \\ 2\times & x \sim z > y \\ 2\times & x > y > z \end{cases}$$

On définit de façon classique une *fonction de choix*, une *procédure de choix* (appelée aussi *procédure de vote*) et une *procédure de rangement*. Ces définitions formalisent les différentes façons de prendre une décision et de choisir ou de classer des candidats. Une procédure de choix $C$ est une fonction qui choisit, pour tout profil $\pi$ et tout sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de candidats, l'ensemble $\emptyset \neq C(A, \pi) \subseteq A$ des meilleurs candidats de A pour le profil $\pi$. Une fonction de choix F est définie pour tout sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de candidats et choisit un sous-ensemble $\emptyset \neq F(A) \subseteq A$ de candidats. Pour une procédure de choix $C$ et un profil $\pi$, on note $C_\pi$ la fonction de choix définie par : $\forall\ \emptyset \neq A \subseteq X$, $C_\pi(A) = C(A, \pi_{|A})$ correspondant à la fonction de choix induite par $C$ sur le profil $\pi$. Enfin, nous définissons un dernier type de procédures, qui seront au coeur de nos préoccupations : une procédure de rangement $R$ associe, à tout profil $\pi$ et à tout ensemble $\emptyset \neq A \subseteq X$ de candidats, $R(A, \pi)$ préordre total sur A.

Un *score* est une fonction $s$ qui, étant donné un sous-ensemble $A \neq \emptyset$ de candidats, et pour tout profil $\pi_{|A}$, associe un score réel $s(a, \pi_{|A})$ à chaque candidat $a \in A$. Intuitivement, le score représente la qualité d'un candidat dans un ensemble de candidats, étant donné un profil. Ce score dépend donc de l'ensemble de candidats considérés dans le profil. Dans un scrutin uninominal majoritaire à un tour, le nombre de votants ayant placé un candidat donné en tête est un exemple de score pour ce candidat. Le score de Borda (qui est la somme des rangs d'un candidat dans les préférences, les rangs étant décroissants) est un autre exemple classique. On peut définir, à partir d'un score $s$, une procédure de choix $F_s$ qui renvoie les éléments de score maximal pour chaque profil. $F_{-s}$ est donc une procédure de choix renvoyant les éléments de score $s$ minimal. On notera $R_s$ la procédure de rangement classant les candidats par score décroissant.

Une propriété essentielle des procédures de choix et de rangement, à laquelle nous allons nous intéresser, est la *monotonie*. La monotonie d'une procédure de choix ou de rangement formalise la notion suivante : si la position d'un candidat s'améliore dans les préférences des votants (il devient plus populaire), alors il ne peut en être désavantagé dans le résultat du processus de décision. Il existe une notion duale de la monotonie, qui est en fait équivalente : si la position d'un candidat se détériore dans les préférences des votants (il devient moins populaire), alors il ne peut en être avantagé dans le résultat du processus de décision (que ce soit un vote ou un classement). On se reportera à l'annexe A pour une définition formelle de la monotonie et une démonstration de l'équivalence entre ces deux formulations.

Il existe de nombreuses procédures de vote classiques : le scrutin uninominal majoritaire à deux tours (présidentielle française par exemple), le scrutin uninominal majoritaire à un tour, la méthode de Borda (ces trois premières méthodes induisent d'ailleurs un score), celle de Condorcet, ou celle de Schwartz en sont des exemples. Elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients, que ce soit d'un point de vue théorique ou pratique (il est souvent important qu'une procédure de vote soit applicable dans le monde réel, ce qui impose alors des contraintes de faisabilité à respecter). Cependant, il semble judicieux de ne s'intéresser qu'à des procédures de choix "raisonnables", dans le sens où elles respectent certaines exigences naturelles (voire quasiment indispensables), comme par exemple la monotonie, dont il paraît difficilement acceptable qu'elle ne soit pas respectée par une procédure de choix pertinente.

## 2.3 Des résultats négatifs

On rappelle que l'on se place dans le cas où il y a au moins trois candidats. Le cas où il y en a seulement deux (que l'on nomme référendum) est beaucoup moins problématique.

Le premier résultat négatif réside dans les résultats contradictoires des différentes procédures. Ainsi par exemple, sur le profil (E1) donné plus haut, $x$ est élu au scrutin uninominal majoritaire alors que $y$ est le vainqueur de Condorcet... Comment trancher entre ces résultats ? Cela illustre parfaitement le fait qu'il n'y a pas toujours un ou des gagnants “indiscutables” pour un profil de préférences donné. Le choix du mode de scrutin est donc essentiel et a une influence décisive sur les résultats.

Il existe de nombreux paradoxes classiques [**?**] : paradoxe de non monotonie, paradoxe d'abstention, paradoxe de réunions de circonscriptions, etc, sur lesquels nous n'insisterons pas, mais qui présagent des difficultés que l'on rencontre dans la théorie du choix social.

Dans le cadre de l'étude de la monotonie, nous allons montrer, sur l'exemple (E3) suivant, que le scrutin uninominal majoritaire à deux tours n'est pas monotone, c'est-à-dire que l'évolution d'un candidat dans les préférences des votants peut aboutir à l'évolution inverse dans le résultat du scrutin.

$$(E3) \left\{ \begin{array}{ll} 8\times & x > y > z \\ 5\times & z > x > y \\ 4\times & y > z > x \end{array} \right. \qquad (E3') \left\{ \begin{array}{ll} 6\times & x > y > z \\ 2\times & y > x > z \\ 5\times & z > x > y \\ 4\times & y > z > x \end{array} \right.$$

Au premier tour, $x$ et $z$ sont sélectionnés, puis $z$ bat $x$ au deuxième avec 9 voix contre 8. Supposons, dans un second temps, que $x$ perde en popularité, et que 2 des 8 votants qui préféraient $x$ votent maintenant pour $y$ (E3'). $x$ et $y$ passent alors au second tour, avec 6 voix chacun. Au second tour, $x$ l'emporte largement sur $y$, avec 11 voix contre 6.

La perte de popularité de $x$ aboutit donc paradoxalement à son élection ! En fait, dans la situation initiale, $x$ perd au second tour face à $z$, mais il aurait gagné face à $y$. Baisser légèrement la popularité de $x$ en faveur de $y$ élimine alors $z$ au premier tour, au profit de $y$ qui se fait battre par $x$ au second. On aborde dans l'annexe C d'autres défauts graves du scrutin uninominal majoritaire.

Mais il y a un autre problème extrêmement préoccupant pour la démocratie et la sincérité du vote. En effet, si l'on considère les exemple (E3) et (E3'), cela veut dire qu'un certain nombre de votants de $x$ ont *intérêt à masquer leurs préférences réelles* et à voter $y$ au lieu de $x$, pour aboutir à l'élection de $x$ ! Les votants n'ont donc, dans ce cas, pas tous intérêt à voter selon leurs convictions : on dit que la procédure de vote est *manipulable*. Est-ce un défaut inhérant au scrutin uninominal majoritairee à deux tours ? Malheureusement, non. Le théorème de Gibbard-Satterthwaite (1973) stipule que toute méthode de vote non dictatoriale est manipulable lorsqu'il y a au moins 3 candidats. Il s'agit donc d'un théorème d'impossibilité qui garantit l'absence de méthodes de vote satisfaisant au critère de non manipulabilité.

On remarquera cependant que ce théorème ne s'intéresse pas à la faisabilité d'une telle manipulation, mais seulement à l'existence d'une modification des préférences d'un votant qui lui apporte plus de satisfaction. Cela suppose en particulier de connaître exactement les préférences de tous les autres votants (ce qui est souvent inenvisageable en pratique, compte-tenu du nombre de votants et de l'incertitude de leurs préférences) et de pouvoir déterminer en temps raisonnable comment modifier nos préférences exprimées pour que le résultat nous soit plus favorable. Conitzer s'est par exemple intéressé aux procédures de vote NP-difficiles à manipuler [**?**].

Un autre résultat négatif d'importance est le fameux théorème d'Arrow : à partir de 3 candidats, un certain nombre de propriétés naturelles, et apparemment indispensables, ne peuvent être réunies que dans un seul type de procédure de rangement : la dictature ! Ce théorème d'impossibilité nous oblige à renoncer à au moins l'une de ces propriétés, mais souligne aussi les limites de cette approche par spécifications "naturelles" à respecter, au final souvent trop contraignantes.

## 2.4 Les procédures de rangement par choix itérés

A partir d'une procédure de choix, un moyen naturel et efficace d'obtenir un rangement est d'itérer, à chaque étape, cette procédure de choix sur les candidats qui n'ont pas été choisis à l'étape précédente. Une autre approche consiste, à chaque étape, à itérer la procédure sur les candidats qui ont été choisis. Ces deux approches relèvent de la même idée : prendre les meilleurs, puis les meilleurs de ceux qui restent, etc. Et, de façon similaire : éliminer les plus mauvais, puis les plus mauvais de ce qui restent, etc. Ces deux méthodes, comme nous le montrerons par la suite, sont équivalentes. Elles ont pour avantage de permettre de définir, à partir de toute procédure de choix, une procédure de rangement. Ces procédures sont semblables à de nombreux modes de prises de décision dans notre société, qui sont décomposés en étapes successives ; citons, à titre d'exemple ludique, le cas de l'élimination successive des candidats dans les jeux de télé-réalité.

Nous allons définir les *procédures de rangement itératives* (RIT*) (dites *descendantes*) et les *procédures par raffinement progressif* (RAP*) (dites *ascendantes*). Soit $C$ une procédure de choix, $\emptyset \neq A \subseteq \mathrm{X}$ et $\pi \in \Pi(\mathrm{A})$. Dans une procédure RIT, à chaque étape, on choisit les meilleurs éléments et on itère le choix sur les éléments restants. On s'arrête lorsqu'il n'y a plus d'éléments à traiter. Le rangement qui en résulte est défini par : plus tôt un élément a été choisi, mieux il est classé.

$RIT_C(A, \pi)$

1 : $k \leftarrow 1$
2 : $A_1 \leftarrow A$
3 : répéter
4 : $\quad C_k \leftarrow C(A_k, \pi_{|A_k})$
5 : $\quad A_{k+1} \leftarrow A_k \backslash C_k$
6 : $\quad k \leftarrow k + 1$
7 : jusqu'à $A_{k+1} = \emptyset$
8 : $\forall (a, b) \in A^2, (a\ RIT_C(A, \pi)\ b) \Leftrightarrow (\exists (i, j), i \leq j, a \in C_i \text{ et } b \in C_j)$

Dans une procédure* RAP, à chaque étape, on choisit les éléments sur lesquels on va raffiner le résultat (et l'on rejette les autres). On s'arrête lorsque l'ensemble des éléments à raffiner est stable. Le rangement qui en résulte est alors défini par : plus tard un élément a été rejeté, mieux il est classé.

$RAP_C(A, \pi)$

$k \leftarrow 1$
$A_1 \leftarrow A$
répéter
    $A_{k+1} \leftarrow C(A_k, \pi_{|A_k})$
    $C_k \leftarrow A_k \backslash A_{k+1}$
    $k \leftarrow k + 1$
jusqu'à $C_k = \emptyset$
$C_k = A_k$
$\forall (a, b) \in A^2, (a \ RAP_C(A, \pi) \ b) \Leftrightarrow (\exists (i, j), i \geq j, a \in C_i \text{ et } b \in C_j)$

On peut aussi définir une procédure RAP à l'aide d'une procédure de rejet R ("complémentaire" de la procédure de choix) qui choisit les éléments à rejeter. On utilise parfois cette approche quand la procédure de rejet est plus facile à spécifier.

Dans l'étude de la monotonie, il semble cependant plus naturel de travailler avec la version utilisant une procédure de choix, notamment car on conserve la propriété naturelle de monotonie de la procédure de choix. Une autre approche consiste à utiliser une procédure de rejet et à définir une propriété de "monotonie complémentaire" pour cette procédure de rejet (qui signifierait que la procédure de choix qui lui est associée est monotone).

Une procédure RIT classique, que l'on appellera $P1$ par la suite, est le choix, à chaque étape, par scrutin uninominal majoritaire à un tour, du candidat le plus populaire (chacun vote pour son candidat préféré). Une procédure RAP classique $P2$ est le rejet, à chaque étape, par un scrutin uninominal majoritaire à un tour, du candidat le plus impopulaire (chacun vote pour le candidat qu'il veut éliminer). On verra par la suite le lien formel qui existe entre ces procédures similaires, mais pas équivalentes, comme le montre l'exemple suivant :

$$(E4) \quad \begin{cases} x > y > z \\ x > z > y \\ y > z > x \\ z > y > x \end{cases}$$

Sur l'exemple $E4$, la procédure $P1$ donne $x > y \sim z$ , alors que la procédure $P2$ donne $y \sim z > x$. Cela traduit en fait l'idée que $x$ est le candidat le plus majoritairement apprécié, mais aussi le plus majoritairement détesté.

L'utilité de telles procédures est bien réelle ; il paraît souvent beaucoup plus facile et envisageable de sélectionner seulement les meilleures alternatives, plutôt que de produire un rangement. L'itération est alors une solution efficace pour obtenir un rangement. On peut arguer que les fonctions de scores permettent de classer directement les candidats, mais elles présentent en fait un certain nombre de défauts (comme par exemple d'être sensibles au retrait des meilleurs candidats, ou d'exploiter seulement une partie des informations sur les préférences des votants). On se reportera à l'annexe B pour une justification empirique de l'itération du choix et ses limites.

Une propriété naturelle que l'on peut exiger de ces procédures de rangement est qu'elles soient monotones. En effet, il paraît difficilement concevable qu'un candidat pâtisse d'une amélioration dans les préférences des votants. Cependant, cette propriété essentielle de monotonie de procédures itératives est problématique car, à chaque étape, on a une vision partielle de la situation et un appauvrissement progressif des informations que l'on exploite. C'est le sujet de la partie suivante.

# 3 Monotonie des procédures de rangement itératives

La propriété de monotonie d'une procédure de rangement, bien qu'intuitive, n'est pas facile à démontrer à partir de la procédure de choix correspondante. On aimerait donc trouver des conditions nécessaires, suffisantes (et idéalement des conditions nécessaires et suffisantes) pour caractériser les procédures de choix aboutissant à une procédure RIT monotone. Le problème de monotonie des procédures RIT vient du fait qu'à chaque étape, on exploite seulement une partie des informations contenues dans les préférences des votants (puisque certains candidats ont déjà été sélectionnés), et que cette vision partielle de leurs préférences à chaque étape peut engendrer, au final, une procédure de rangement qui n'est pas monotone.

On parlera dans la suite de procédure de choix *supermonotone* lorsque la procédure de rangement RIT associée à cette procédure de choix est monotone.

## 3.1 Résultats négatifs

Un certain nombre de résultats négatifs ont été établis. Le premier est qu'une procédure de choix non monotone sera nécessairement non supermonotone. Des procédures de choix classiques, comme celle de Borda, ou le scrutin uninominal majoritaire, ne sont pas non plus supermonotones. La monotonie de la procédure de choix n'est donc pas suffisante, puisque, par exemple, la méthode de Borda est monotone. Il y a même "pire" : des contraintes trop fortes de monotonie de la procédure de choix peuvent, paradoxalement, garantir qu'elle n'est pas supermonotone [**?**].

Pour comprendre plus concrètement ces problèmes de monotonie, nous allons nous intéresser à la procédure itérée de Borda et mettre en évidence les phénomènes qui rendent le rangement obtenu non monotone. A partir de la méthode de Borda (comme pour tout score), on peut trivialement induire un rangement des candidats dans l'ordre décroissant des scores. Une telle procédure sera bien entendu monotone dans le cas de Borda (améliorer un candidat augmente strictement son score de Borda et ne peut que diminuer le score des autres, donc le candidat ne peut que progresser dans le rangement induit). Une autre façon de procéder est de s'intéresser à la procédure de choix $F_B$ (qui sélectionne les candidats ayant un score maximal) associée au score de Borda B, et de l'itérer (procédure $P3 = RIT_{F_B}$). Voici un profil qui montre que la méthode de Borda n'est pas supermonotone (c-à-d que la procédure $P3$ n'est pas monotone).

$$(E5) \quad \begin{cases} 4\times & z > x > y \\ 3\times & x > y > z \\ 1\times & y > z > x \end{cases}$$

Les scores de Borda sont de 18 pour $x$, 13 pour $y$ et 17 pour $z$ ce qui aboutit à classer $x$ premier. On constate alors que $y \sim z$, d'où une préférence globale : $x > y \sim z$.

Supposons que l'un des votants décide d'augmenter $y$ d'une place (c-à-d d'échanger $x$ et $y$ initialement consécutifs et dans cet ordre). On aura donc les scores de Borda suivant : 18-1=17 pour $x$, 13+1=14 pour $y$, et toujours 17 pour $z$. La nouvelle préférence globale sera alors $x \sim z > y$. L'augmentation de $y$ dans les préférences l'a paradoxalement classé après $z$ dans le nouveau résultat, et il est maintenant seul dernier.

Il est intéressant de s'attacher à cet exemple pour comprendre ce qui permet de le faire "marcher". En fait, en l'absence de $x$, on a $y \sim z$ (ils se battent chacun 4 fois), et c'est donc l'intercalement de $x$ qui rend $z$ plus attractif au niveau collectif (car d'après les scores de Borda, $x > z > y$). De fait, l'élimination de $x$ en premier ne permet plus de trancher entre $y$ et $z$.

Mais lorsque l'un des votants intervertit $x$ et $y$ (ce qui correspond à une amélioration pour $y$), le score de $x$ diminue de 1 et se retrouve à égalité avec le score de $z$. Ils sont donc tous les 2 vainqueurs au premier tour, ce qui permet à $z$ de repasser devant $y$ et de retrouver sa position "naturelle" (du point de vue des scores de Borda sur le profil). L'intérêt de cet exemple est de bien comprendre quels phénomènes peuvent rentrer en jeu dans l'itération pour aboutir à des procédés non monotones, mais aussi de mesurer l'ampleur du problème.

Itérer la méthode de Borda est donc une mauvaise idée, car la procédure de rangement obtenue n'est pas monotone, mais aussi car, la fonction de Borda ayant une vision complète des préférences et induisant déjà un rangement, il ne semble pas nécessaire de l'itérer (contrairement au cas du vote uninominal qu'il est pertinent d'itérer compte-tenu de son exploitation très partielle des préférences). Malheureusement, le cas de l'itération du vote uninominal à un tour (procédure P1) n'est pas non plus monotone, comme on peut le voir sur cet exemple :

$$(E5) \quad \begin{cases} & z > y > x \\ 2\times & y > x > z \end{cases}$$

On a $y > x > z$, mais si le dernier votant intervertit $y$ et $x$, alors $y \sim x \sim z$ (et $x$ se retrouve donc à égalité avec $z$ qu'il battait auparavant). On n'attendait de toutes façons pas un comportement monotone de cette procédure qui ne considère que le candidat préféré de chaque votant pour choisir. Contourner le problème en éliminant à chaque tour le candidat récoltant le moins de voix n'arrange rien (annexe C).

## 3.2 Conditions suffisantes de supermonotonie

Nous présentons ici quelques résultats généraux, et en particulier ceux de Juret [?] sous la forme de conditions suffisantes sur une procédure de choix pour qu'elle soit supermonotone. Ce sont des résultats encourageants puisqu'ils permettent de démontrer que certaines procédures de choix sont supermonotones, mais qui ne sont pas satisfaisants car on n'a pas de condition nécessaire utile en pratique autre que la monotonie de la procédure de choix.

On imagine mal comment une procédure de rangement pourrait être monotone si la procédure de choix qu'elle utilise est non monotone. Commençons donc par une proposition élémentaire fort naturelle :

**PROPOSITION 1** : $C$ supermonotone $\Rightarrow$ $C$ monotone

Preuve : par contraposée, il suffit d'écrire que $C$ est non monotone et de montrer que la première étape du rangement itératif ne le sera pas non plus. □

Bien que la monotonie de la procédure de choix soit nécessaire, il est fondamental de comprendre pourquoi elle n'est pas suffisante pour la supermonotonie. En effet, si la position d'un candidat $x$ s'est améliorée élémentairement, toutes les configurations envisageables le mettant en jeu tourneront plus en sa faveur qu'avant cette amélioration (par monotonie de la procédure de choix). Mais c'est trompeur, car le problème est que, une fois le profil modifié, l'algorithme risque de ne pas choisir les mêmes vainqueurs, et donc de passer au cours de son déroulement par de nouvelles configurations qu'il n'avait pas traversées initialement, et qui peuvent se révéler être moins favorables à $x$ que les configurations qu'il traversait avant modification du profil.

Supposons par exemple que $x > z$ dans le rangement issu du profil initial. Dans le nouveau profil qui améliore élémentairement $x$, on peut très bien, au cours de l'algorithme, arriver à une configuration où, bien que $x$ ait été avantagé, le candidat $z$ est seul choisi à cette étape (et il en aurait été, par monotonie, bien sûr de même sur le profil initial, seulement cette configuration ne s'était pas présentée lors de l'exécution de la procédure de rangement itérative).

On introduit maintenant des propriétés sur les fonctions de choix, que l'on étend ensuite aux procédures de choix. L'idée est d'essayer de décomposer la supermonotonie en sous-propriétés parlantes, et si possible faciles à vérifier. La propriété de rationalisation d'une fonction de choix signifie que les choix de la fonction suivent une relation binaire (et semblent donc plutôt “réguliers” ou “rationnels”). C'est une propriété cependant très contraignante et vérifiée par peu de procédures.

Une fonction de choix $F$ est *rationalisable* par la relation binaire $R$ sur $X$ ssi :
$\forall\ A \neq \emptyset \subseteq X,\ (x \in F(A) \ \Leftrightarrow\ \forall\ y \in A\backslash\{x\},\ xRy)$

On étend naturellement cette définition à une procédure de choix. $C$ est rationalisable ssi :
$\forall\ \pi \in \Pi(X),\ C_\pi$ est rationalisable.

Couplée à la monotonie, il est raisonnable d'imaginer que l'on peut conclure au caractère supermonotone d'une procédure de choix, qui est à la fois "régulière" et monotone. Et, en effet :

**PROPOSITION 2** : $C$ rationalisable et monotone $\Rightarrow C$ supermonotone

Malheureusement, la rationalisation s'avère être une propriété trop contraignante : elle n'est donc pas nécessaire pour la supermonotonie, comme nous le verrons (Corollaire d). On peut aussi s'interroger sur l'intérêt pratique d'une telle propriété : est-elle facile à vérifier ? Y a-t-il beaucoup de procédures de choix classiques qui la vérifient ? Il serait aussi intéressant d'exhiber un exemple de procédure de choix connue dont le comportement supermonotone s'expliquerait avec cette propriété de rationalisation (nous n'en avons trouvé aucune dans les articles connus).

La rationalisation est en fait une propriété fortement lié à d'autres conditions (dites de stabilité) étudiées par Sen, Moulin et Bordes. Sen a d'ailleurs montré que l'on pouvait la décomposer en deux sous propriétés : $\alpha$ (liée à une notion d'*indépendance*, voir annexe H), et $\gamma$ qui, ensemble, sont équivalentes à la rationalisation [**?**].

Propriété $\alpha$ - la fonction de choix F vérifie : $\forall A \neq \emptyset \subseteq A' \subseteq X,\ F(A') \cap A \subseteq F(A)$
C'est-à-dire que : le désistement d'un candidat ne peut pas défavoriser ceux qui auraient été choisis s'il ne s'était pas désisté. Dual : si l'on augmente le nombre de candidat, cela ne peut pas faire choisir des candidats de l'ensemble initial qui n'étaient pas choisis initialement.

Propriété $\gamma$ - la fonction de choix F vérifie : $\forall A, A' \neq \emptyset \subseteq X,\ F(A) \cap F(A') \subseteq F(A \cup A')$
C'est-à-dire que : un candidat choisi parmi deux ensembles de candidats le sera toujours si on réunit ces deux ensembles.

**Corollaire de la proposition 2** : $C$ monotone et vérifie $\alpha$ et $\gamma \Rightarrow C$ supermonotone
*(On a étendu implicitement les propriétés $\alpha$ et $\gamma$ aux procédures de choix.)*

L'intérêt de ce corollaire est qu'il permet de mieux comprendre comment, lorsqu'une fonction de choix réunit ces trois propriétés, on peut conclure à la supermonotonie de cette procédure.

**PROPOSITION 3** : associée à la monotonie, aucune des propriétés $\alpha$ et $\gamma$ n'est nécessaire ou suffisante pour la supermonotonie.

Preuve : on peut facilement exhiber des procédures de choix respectant soit $\alpha$, soit $\gamma$, qui soient monotones mais pas supermonotones. Réciproquement, nous verrons des procédures supermonotones qui ne vérifient pas $\alpha$ (Maximin) ou pas $\gamma$ (Maximax). $\square$

**Corollaire** : l'axiome de rationalisation n'est pas nécessaire pour la supermonotonie.

Remarque* : il semblerait qu'aucun résultat n'ait été obtenu pour déterminer s'il est possible de violer les deux axiomes $\alpha$ et $\gamma$ à la fois dans une procédure supermonotone, ou s'il est nécessaire de respecter au moins l'une de ces deux propriétés. On pourrait en effet imaginer une proposition de la forme : $C$ supermonotone $\Rightarrow$ ($C$ vérifie $\alpha$ ou $C$ vérifie $\gamma$).

Une autre idée naturelle que nous allons introduire pour contraindre une procédure de choix à être supermonotone est d'associer la monotonie avec une contrainte forte d'indépendance, qui est dérivée de la propriété $\alpha$.

Propriété d'*indépendance forte** - la fonction de choix F vérifie :
$\forall A \neq \emptyset \subseteq A' \subseteq X,\ (F(A') \cap A = F(A) \text{ ou } F(A') \cap A = \emptyset)$

Cette propriété traduit l'idée que lorsque l'on ajoute des candidats, cela ne peut pas départager les candidats qui étaient choisis initialement. On l'étend naturellement aux procédures de choix. Il semble naturel que cette propriété, couplée à la monotonie, permette de conclure à la supermonotonie. Et, en effet :

**PROPOSITION* 4** : $C$ monotone et $C$ fortement indépendante $\Rightarrow$ $C$ supermonotone

Preuve : l'idée est extrêmement simple, et c'est elle qui nous a amené à définir l'indépendance forte. Si l'on considère deux candidats $a$ et $b$, il suffit d'appliquer l'indépendance forte pour constater que, les positions relatives de $a$ et $b$ dans le rangement final ne dépendent que de $C(a, b)$. On conclut en utilisant la monotonie de C. □

On remarque que le fait que le rangement final ne dépende que de $C(a, b)$ impose de suivre dans le rangement final le résultat du duel de tout couple de candidats. Une procédure vérifiant cet axiome risque donc d'être peu discriminante.

Aurait-on cependant trouvé une nouvelle condition suffisante intéressante et intuitive pour caractériser la supermonotonie ? Malheureusement, non.

**PROPOSITION* 5** : F fortement indépendante $\Rightarrow$ F respecte $\alpha$ et $\gamma$.

Preuve : F respecte trivialement $\alpha$. Pour $\gamma$, $\forall\ A, B \neq \emptyset \subseteq X$, on a :
$F(A \cup B) \cap A = F(A)$ ou $\emptyset$ par indépendance forte.
$F(A \cup B) \cap B = F(B)$ ou $\emptyset$ par indépendance forte.
Comme $F(A \cup B) \neq \emptyset$, elle contient $F(A)$ ou $F(B)$, donc leur intersection. □

La proposition 4 n'est donc qu'un corollaire des propositions 2 et 5.

Nous avons défini, dans le formalisme du choix social, la notion de score (le vote uninominal à un tour induit par exemple un score). Juret définit dans son article [**?**] la notion de score monotone et de respect itératif d'un score monotone par une procédure de choix (qu'il montre être équivalent à la supermonotonie). Il ne s'agit en fait ni plus ni moins que de la traduction en termes numériques de la caractérisation ordinale de la supermonotonie.

Le respect itératif d'un score monotone facilite l'esprit des démonstrations de supermonotonie en se situant dans le cadre de l'attribution d'un score à chaque élément, avant de vérifier dans un second temps que ce score est monotone. Mais ce formalisme n'apporte rien à la théorie : c'est seulement une manière concise et efficace de reformuler la monotonie (on transforme en fait des préordres totaux en des scores numériques les représentant et réciproquement).

Une remarque importante à ce sujet est que la procédure de rangement RIT associée à la procédure de Borda (procédure de rangement dont on a montré qu'elle n'était pas monotone) ne suit pas itérativement le score de Borda, puisque ce dernier est monotone (la procédure de Borda étant bien évidemment monotone). Il faut donc bien faire la différence entre les deux.

## 3.3 Exemples de procédures de choix supermonotones

On connaît relativement peu de procédures de choix supermonotones, la plupart des résultats sur le sujet concernant en général d'avantage des résultats négatifs. Il y a bien entendu des résultats positifs généraux, qui n'ont pas un impact extraordinaire. La procédure de choix qui choisit tout le temps tous les candidats est supermonotone (le rangement est toujours identique et correspond à une seule classe d'équivalence regroupant l'ensemble des candidats). Il en va de même pour toute procédure de choix monotone repectant l'axiome d'indépendance forte (et il est facile de construire une procédure de choix monotone respectant cet axiome, en travaillant par exemple sur les scores de Condorcet des couples de candidats).

Des résultats (assez peu concluants) ont été obtenus par Juret [**?**], en utilisant, sans que cela soit nécessaire, la notion de score monotone. Il a montré que ces procédures sont supermonotones :

*Dans ce qui suit, la puissance minimum d'un candidat dans un profil est définie comme le nombre minimum de candidats qu'il bat dans chacune des préférences individuelles de ce profil. La puissance maximum d'un candidat dans un profil correspond au nombre maximum de candidat qu'il bat dans les préférences individuelles de ce profil. La puissance est un indicateur très peu discriminant !*

→ Maximin : la procédure de choix Maximin choisit, parmi les candidats, ceux dont la puissance minimum est la plus grande. On choisit donc les candidats qui maximisent le seuil tel qu'ils battent, dans chacune des préférences individuelles, un nombre de candidats supérieur au seuil.

→ Maximax : la procédure de choix Maximax choisit, parmi les candidats, ceux dont la puissance maximum est la plus grande. On choisit donc les candidats qui battent le plus de candidats dans l'une des préférences d'un votant.

→ Procédure de Schwartz : c'est une réponse naturelle au paradoxe de Condorcet. On crée un graphe correspondant aux résultats des tournois avec les scores de Condorcet. On calcule sa fermeture transitive, puis on conserve uniquement la partie asymétrique pour se débarrasser des cycles. On choisit alors les éléments maximaux (de degré entrant nul). Nous en proposons en annexe G une interprétation et une autre démonstration n'utilisant pas les scores.

Le nombre de procédures de choix démontrées supermonotones reste malheureusement limité, mais nous verrons dans la partie suivante comment les procédures (faiblement) supermonotones dans le cadre de tournois peuvent s'appliquer à notre problématique des rangements. En annexe F, nous nous intéressons au cas particulier des scores et montrons comment construire des familles de procédures supermonotones à partir d'une seule procédure.

Nous allons maintenant démontrer qu'à toute procédure de choix supermonotone correspond en fait deux procédures de rangement monotones (l'une de type RIT et l'autre de type RAP).

## 3.4 Monotonie des procédures par raffinements progressifs

Dans le cadre de l'étude de la monotonie des procédures de rangement procédant par choix itérés, il est important de pouvoir transposer, de manière efficace et élégante, les résultats obtenus pour les procédures de rangement itératives aux choix par raffinement progressif. Le formalisme et les résultats de cette section sont propres à ce document*.

Dans ce qui suit, $C$ est une procédure de choix. On dira que $C$ est *supermonotone*$_{RAP}$* ssi $RAP_C$ est monotone.

On définit $C^*$ la *procédure de choix duale** de $C$ par :

$$\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X, \forall\, \pi \in \Pi(\mathrm{A}),\, C^*(A,\pi) = \begin{cases} \mathrm{A} \setminus C(A,\pi^{-1}) & \text{si } A \setminus C(A,\pi^{-1}) \neq \emptyset \\ \mathrm{A} & \text{sinon} \end{cases}$$

Intuitivement, la procédure de choix $C^*$ va permettre de transformer une procédure de choix "acceptable" d'un rangement RIT en une procédure de choix "acceptable" d'un rangement RAP, et réciproquement. Dans le cas de la procédure $\mathrm{RIT}_U$ définie à partir de la fonction de choix U du scrutin uninominal majoritaire à un tour, la procédure $\mathrm{RAP}_{U^*}$ correspond à l'élimination du candidat le "plus détesté" à chaque itération (ce sont en fait respectivement les procédures P1 et P2 évoquées auparavant).

On montre dans l'annexe D les propriétés suivantes du dual :

- $C^*$ est une procédure de choix
- $C = (C^*)^*$
- $C$ monotone ssi $C^*$ monotone.

**PROPOSITION* 6** *(preuve en annexe E)* : $RAP_C(A,\pi) = (RIT_{C^*}(A,\pi^{-1}))^{-1}$

Toute procédure $RAP_C$ est donc égale à l'inverse du rangement obtenu par la procédure $RIT_{C^*}$ issue de la fonction $C^*$ sur l'inverse du profil. On peut comprendre facilement l'intuition qui repose derrière cette proposition en considérant les procédures $P1$ et $P2$ définies précédemment : lorsque l'on inverse un profil, les candidats détestés deviennent les candidats préférés pour chaque votant, et réciproquement.

On dira que $RAP_C$ et $RIT_{C^*}$ sont des *procédures duales** . En remplaçant $C$ par $C^*$, on a donc que $RIT_C$ et $RAP_{C^*}$ sont également des procédures duales (puisque $C^{**} = C$). $P1$ et $P2$ sont par exemple deux procédures duales. Intuitivement, cela correspond à des procédures RIT et RAP qui sont très similaires : si je retourne mon profil et que j'applique l'une des procédures, j'obtiens l'ordre inverse de ce que j'aurais obtenu avec l'autre. Cela permet donc de formaliser joliment les similitudes existant entre certaines procédures qui n'aboutissent cependant pas, dans le cas général, au même résultat sur le même profil.

**PROPOSITION* 7** : $RAP_C$ monotone ssi $RIT_{C^*}$ monotone

Preuve : il suffit d'appliquer l'équivalence entre les deux formulations de la monotonie sur l'égalité de la proposition 6, en remarquant que $\pi' >_a \pi \;\Leftrightarrow\; \pi^{-1} >_a \pi'^{-1}$. □

Il y a donc équivalence pour la monotonie entre 2 procédures duales. C'est assez logique, puisque, "à peu de chose près", ces procédures sont similaires dans leur fonctionnement. Ainsi, à toute procédure de choix supermonotone correspond en fait deux procédures de rangement monotones (l'une de type RIT et l'autre de type RAP).

**Corollaire* 1** : $C$ supermonotone$_{RAP}$ ssi $C^*$ supermonotone
(et $C$ supermonotone ssi $C^*$ supermonotone$_{RAP}$ en passant au dual).

On peut aussi définir, pour toute condition suffisante de supermonotonie, une condition suffisante de supermonotonie$_{RAP}$. p($C$) désigne une propriété quelconque d'une procédure de choix.

**Corollaire* 2** : si ($C$ monotone & p($C$) $\Rightarrow$ $C$ supermonotone), on a une condition suffisante induite : ($C$ monotone & p($C^*$) $\Rightarrow$ $C$ supermonotone$_{RAP}$)

Il faut donc s'intéresser au dual d'une procédure de choix pour vérifier qu'elle est supermonotone$_{RAP}$, ce qui n'est pas toujours très intuitif, mais qui ne pose en général pas de problèmes, en passant par exemple à la fonction de rejet.

Les résultats obtenus par Juret[**?**] pour les procédures RIT peuvent donc s'étendre aux procédures RAP en considérant le dual d'une procédure de choix. On a donc en particulier un ensemble de propositions qui découlent de ce corollaire 2, utilisé sur les conditions suffisantes vues dans la section précédente. Par exemple :

**Corollaire* 3** : $C$ monotone et $C^*$ rationalisable $\Rightarrow$ $C$ supermonotone$_{RAP}$.

On peut donc étudier indifféremment la monotonie des deux types de procédures de rangement par choix itérés. Selon les cas, il est plus naturel de s'intéresser à l'une ou l'autre, et les résultats qui précèdent nous garantissent l'équivalence entre les deux formes de supermonotonie.

# 4 Itération du choix dans les tournois et applications

Compte-tenu des difficultés importantes rencontrées pour caractériser les procédures de choix supermonotones dans le cadre général de l'agrégation de préférences individuelles, nous allons maintenant nous restreindre à l'étude de la monotonie des choix itérés dans les tournois - en nous appuyant principalement sur les résultats de Bouyssou [**?**] - et montrer que c'est un cas particulier de la problématique qui nous intéresse.

## 4.1 Cas des tournois et liens avec l'agrégation de préférences

Un *tournoi* est une structure ordinale de préférences qui consiste à désigner, pour chaque couple d'alternatives, un unique vainqueur [**?**]. Une représentation simple d'un tournoi est un graphe orienté complet asymétrique. On autorise les ex-aequos dans les tournois *faibles* (plus de contrainte d'asymétrie), et la pondération par des coefficients numériques dans le cas des tournois *pondérés* (pour prendre en compte l'intensité de la victoire par le biais d'un score et sortir du cadre purement ordinal, ce qui correspond à une valuation des arêtes du graphe du tournoi).

La problématique logique, présente dans de nombreuses compétitions où il faut départager des concurrents sur la base de duels, est de choisir, à partir d'un tournoi, les meilleurs éléments (on parle de *procédure de choix de tournoi**), mais aussi souvent de les classer (*procédure de rangement de tournoi**). Une manière naturelle de procéder pour ces deux problèmes est d'utiliser le score de Copeland des candidats (qui correspond au nombre de duels remportés par un candidat) et de choisir les éléments de score maximal, ou de les classer par score décroissant pour obtenir un classement (ou rangement).

Une autre approche pour obtenir un rangement consiste à itérer un choix sur le tournoi, de façon strictement analogue à ce qui est fait dans le cas d'une procédure $RIT$. On en vient alors tout naturellement à s'interroger sur la monotonie de tels rangements par choix itérés dans le cas des tournois, et sur les liens qu'il peut exister entre les problèmes de monotonie de l'itération du choix dans le cas de tournois et dans celui de l'agrégation de préférences individuelles.

Une démarche pertinente pour obtenir un tournoi à partir d'un profil de préférences consiste à déterminer, pour tout couple d'alternatives, laquelle est majoritairement préférée par les votants. Puisque notre but est de pouvoir transposer les résultats des tournois vers l'agrégation de préférences, il est raisonnable de s'interroger sur la nécessité d'étudier tous les tournois : est-ce que tout tournoi correspond aux résultats de confrontations majoritaires menées à partir d'un certain profil de préférences individuelles (et donc aucun tournoi n'introduit d'aspects contradictoires qui ne le rende pas interprétable ainsi) ? Le théorème de McGarvey (1953) répond par l'affirmative dans le cas des tournois faibles, et il est donc nécessaire d'étudier, même dans le cadre implicite de l'agrégation de préférences individuelles, les tournois dans leur globalité.

On remarque cependant que la définition d'un tournoi est complètement indépendante de la notion de profil de préférences ou de confrontation majoritaire, et que c'est uniquement une interprétation qu'on en fait (et qu'il est toujours possible de faire d'après le théorème précédent).

L'itération du choix sur des tournois faibles est bien un sous-problème des procédures de rangement itératives en agrégation de préférences, dans le cas particulier où la procédure de choix que l'on itère dépend uniquement des duels (à majorité large) entre couples de candidats. On obtient même un tournoi pour un nombre impair de votants avec des préférences strictes.

Les problèmes de monotonie de l'itération du choix dans le cas des tournois se posent dans des cas de figure très analogues à ceux rencontrés en agrégation de préférences, comme le montre l'exemple suivant où l'on itère la procédure de choix de Copeland (c'est-à-dire que l'on choisit à chaque étape les éléments qui ont gagné le plus de tournois parmi ceux qui restent).

$$(T) \quad \begin{cases} aTb \\ bTc, bTd \\ cTa, cTd, cTe \\ dTa, dTe \\ eTa, eTb \end{cases} \qquad (T') \quad \begin{cases} aTb, aTc \\ bTc, bTd \\ cTd, cTe \\ dTa, dTe \\ eTa, eTb \end{cases}$$

Dans le tournoi (T), l'itération de Copeland donne : $c > d \sim e > a > b$. Si, dans une nouvelle situation (T'), $c$ est maintenant battu par $a$ (cela correspond à une amélioration du tournoi en faveur de $a$), on a : $a \sim b \sim c \sim d \sim e$, alors qu'auparavant $a > b$, ce qui démontre la non monotonie. L'idée du contre-exemple est très proche de celui relatif à la méthode de Borda : le candidat $b$, dont le score de Copeland est seulement inférieur de 1 à celui du champion $c$, est désavantagé à chaque étape car le gagnant de l'étape précédente était l'un de ceux qu'il battait, et il finit dernier. Mais lorsque l'on transforme $cTa$ et $aTc$, le champion $c$ retombe au même score de Copeland que $b$ et ils sont donc choisis, en même temps que tous les autres, ce qui explique que $a$ se retrouve paradoxalement à égalité avec $b$ qu'il battait aupravant.

Il vaut donc mieux battre un mauvais candidat qu'un bon (le résultat du tournoi avec un mauvais candidat subsistera plus longtemps au cours de l'itération du choix), ce qui est une caractéristique contre-intuitive, pour ne pas dire déraisonnable. Ce "paradoxe" est en fait inhérent à la propriété des choix itérés d'être indifférents au retrait des meilleurs candidats, caractéristique a priori souhaitable mais qui a des contre-parties importantes (avoir battu le vainqueur n'apporte rien, il est préférable de battre le plus mauvais candidat).

## 4.2 Itération du choix dans les tournois faibles et monotonie

Nous allons faire une synthèse rapide des principaux résultats présentés par Bouyssou dans son article [**?**], pour transposer par la suite ces résultats au cadre de l'agrégation de préférences individuelles. Bouyssou étudie le cas général des fonctions de comparaison entre alternatives [**?**] qui incluent notamment toutes les relations binaires complètes (i.e. les tournois faibles) et tous les *tournois "0-weighted"* (basés sur des matrices symétriques de scores correspondant à la différence entre le nombre de votants préférant un candidat à l'autre, dans le cas de profils de préférences sous forme d'ordres stricts). L'étude exhaustive de ce deuxième cas, lorsque les scores ont même parité, est justifiée par les résultats de Debord [**?**].

*Nous nous concentrerons sur le cas des tournois faibles*, en gardant à l'esprit que tous ces résultats sont facilement adaptables aux tournois “0-weighted” (et aussi à d'autres formes de tournois). Une procédure de choix de tournoi dont il résulte par itération un rangement monotone est *T-supermonotone* . Dans ce qui suit, on considère que $T$ est un tournoi faible sur $X$.

Le travail de Bouyssou [**?**] est centré autour de 2 axes (qui débouchent sur 2 propositions) : montrer qu'il n'y a pas de procédure “attrayante” (en un sens que nous allons définir) T-supermonotone, et s'intéresser à un affaiblissement de la monotonie (on parlera de *monotonie faible* et de *faible supermonotonie*).

L'*amélioration élémentaire d'un tournoi faible* est naturelle : elle consiste à favoriser un candidat dans un duel face à un autre candidat (soit en le donnant seul vainqueur s'il y avait égalité, soit en le donnant vainqueur au sens large s'il se faisait battre). On a donc : $T'$ améliore élémentairement T par rapport à $a$ au détriment de $b$ ssi : ($bTa$, $aTb$, $aT'b$ et $\neg bT'a$) ou ($bTa$, $\neg aTb$ et $aT'b$), et les autres résultats du tournoi restent inchangés.

On dit que $a$ *couvre* $b$ si : $aTb$ & $\neg bTa$ et $\forall c \in X,\ bTc \Rightarrow aTc$. La relation de couverture ainsi définie est asymétrique (évident) et transitive (se montre facilement), donc admet un ensemble non vide d'éléments maximaux dans $A \subseteq X$, que l'on note $UC(A, T)$. Les éléments de UC semblent de bons candidats pour le choix des meilleurs (et il paraît difficile de choisir un élément qui ne soit pas dedans, car il serait alors strictement “dominé” par un autre). Le vainqueur de Condorcet, lorsqu'il existe, est l'unique élément de UC (à ce titre, on peut voir que lorsque l'on cherche une solution de compromis, chercher les vainqueurs dans UC n'est donc pas forcément une si bonne idée que ça).

La *neutralité* formalise la propriété pour une procédure de choix de tournoi faible de ne pas dépendre des étiquettes des alternatives de $X$ (ce qui interdit donc des règles pour départager en cas d'égalité ou plus généralement pour avantager certains candidats).

La monotonie est définie comme dans le cadre de l'agrégation de préférence, à partir de l'amélioration élémentaire d'un tournoi faible. Une version affaiblie de la monotonie, appelée *monotonie faible*, oblige seulement à préserver les ordres larges dans une amélioration (un candidat peut donc devenir ex-aequo avec un candidat qu'il battait, bien que sa situation se soit améliorée dans le tournoi). Plus précisément, une procédure de rangement de tournoi $R$ est dite faiblement monotone ssi : pour T' améliorant T pour $a$, $a \geq b \Rightarrow a \geq' b$ ($\geq$ désignant le rangement induit par R à partir du tournoi).

Une définition essentielle dans le cadre de l'itération du choix est le caractère local d'une procédure de choix de tournoi $C$. On dit que C est *locale* ssi : pour tout $A$, les éléments choisis dans A pour un tournoi ne dépendent que de la restriction du tournoi à $A$. C'est encore une fois une forme d'indépendance, et cela interdit par exemple, lorsque l'on itère le score de Copeland, de calculer ce dernier en prenant en compte les meilleures alternatives déjà classées. Le caractère local d'une procédure de choix de tournoi garantit qu'il n'est a priori pas inutile de l'itérer.

Remarque : dans les parties qui précèdent, la définition des procédures RIT et RAP restreignait le profil à l'ensemble de candidats considérés, rendant de fait la procédure de choix locale.

On définit certaines propriétés sur les fonctions de choix de tournoi :
- Aizerman : $C(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow C(B) \subseteq C(A)$
- Strong Superset Property (SSP) : $C(A) \subseteq B \subseteq A \Rightarrow C(B) = C(A)$

**PROPOSITION 8** : une procédure de choix locale, neutre, monotone, Aizerman raffinant UC n'est pas T-supermonotone.

Ce résultat négatif est un théorème d'impossibilité dans la lignée de celui d'Arrow. Les conditions semblent raisonnables, mais il faut se méfier concernant la portée de ce théorème.

**PROPOSITION 9** : une procédure de choix de tournoi locale, monotone et SSP est faiblement T-supermonotone.

C'est un résultat positif sous la forme de conditions suffisantes pour la faible T-supermonotonie. On peut l'appliquer pour montrer la faible T-supermonotonie des deux procédures suivantes :

- Minimal Covering Set *(choisit l'unique ensemble couvrant de candidats de cardinal minimal)*
- Bipartisan Set *(procédure inspirée de la théorie des jeux et de l'équilibre de Nash)*

Enfin, on peut montrer que Top Cycle est T-supermonotone. Top Cycle choisit les éléments de la première classe d'équivalence de l'ordre partiel résultant de la clôture transitive d'un tournoi ; nous verrons que cette procédure est proche de celle de Schwartz.

L'intérêt du cas particulier des tournois est donc de pouvoir simplifier l'étude de la supermonotonie. Si l'on veut absolument la monotonie, la proposition 8 limite nos chances de trouver des procédures de choix qui nous conviennent. En se retreignant à une propriété de monotonie faible, on obtient de nouveaux résultats qui permettent de construire de nouvelles procédures de choix intéressantes, grâce à la proposition 9. Cependant, les résultats obtenus restent peu encourageants pour pouvoir caractériser la T-supermonotonie. Nous nous sommes attachés dans ce qui précède au cas des tournois faibles mais les résultats restent valables pour les fonctions de comparaison.

## 4.3 Applications aux procédures de rangement itératives

Nous allons maintenant envisager les applications des résultats de la section précédente aux procédures de rangement itératives. Ces résultats sur les tournois ne sont finalement pas très optimistes et ne présagent pas de conditions nécessaires et suffisantes intéressantes pour la supermonotonie dans le cas général, qui est encore plus complexe que celle dans le cas des tournois.

Pour construire un tournoi faible à partir d'un profil de préférences (on parlera de *procédure tournoyante**), le plus naturel est de faire se confronter les candidats à la majorité large. Lorsque le nombre de candidats est grand, la probabilité d'égalité entre deux d'entre eux est petite et le tournoi faible résultant est alors la plupart du temps un tournoi normal.

On notera $W_{maj}$ la procédure tournoyante classique transformant un profil $\pi$ en un tournoi faible $W_{maj}(\pi, A)$ sur $A \neq \emptyset \subseteq X$, défini par : $\forall\ (a,b) \in A^2, aTb \Leftrightarrow (|\{i\ /\ a >_i b\}| \geq |\{i\ /\ b >_i a\}|)$. D'une façon plus générale, on construit à partir de toute procédure de choix $C$ une procédure tournoyante $W_C$ définie par : $\forall\ (a,b) \in A^2, aTb \Leftrightarrow a \in C(a,b)$. Il est d'ailleurs possible de construire, sur le même modèle, des tournois "0-weighted".

Corollaire du théorème de McGarvey : pour un ensemble $X$ de candidats, $W_{maj}$ est surjective vers l'ensemble des tournois faibles à au plus $|X|$ éléments.

**PROPOSITION* 10**. Soit $W$ une procédure tournoyante et $C_t$ une procédure de choix de tournois faibles. $C_t \circ W$ est une procédure de choix (au sens des profils de préférences).

Par exemple, dans le cas de préférences strictes et d'un nombre impair de votants, la procédure de Schwartz peut s'écrire comme la composée d'une procédure de choix de tournoi $C_t$ (qui choisit le noyau de la partie asymétrique de la fermeture transitive du graphe du tournoi) et $W_{maj}$.

L'autre intérêt de cette approche est qu'il est toujours possible de faire un duel entre candidats même si les préférences des votants ne sont pas transitives, ce qui permettrait donc probablement de généraliser une partie de nos résultats à cette représentation moins contraignante des préférences individuelles.

**PROPOSITION* 11**. $C_t$ T-supermonotone $\Rightarrow$ $(C_t \circ W_{maj})$ supermonotone
(La réciproque est fausse dans le cas général).

Preuve : l'amélioration élémentaire de $a$ au détriment de $b$ dans un profil peut ne pas avoir de conséquences sur le tournoi en résultant par $W_{maj}$, ou ajouter la préférence $aTb$ au nouveau tournoi. Par T-supermonotonie de $C_t$, on peut conclure à l'amélioration élémentaire (au sens large) pour $a$ dans le rangement final, et $(\mathrm{C}_t \circ W_{maj})$ est donc supermonotone. □

On déduit de cette proposition 11 qu'appliquer Top Cycle au tournoi issu de la relation majoritaire est donc une nouvelle procédure supermonotone. Cependant, Top Cycle est exactement équivalente à la procédure de Schwartz dans le cas d'un nombre impair de votants, et elle est moins discriminante dans le cas d'un nombre pair de votants (les éventuels ex-aequos sont cocycliques avec Top Cycle alors qu'ils sont indifférents avec Schwartz). Ce résultat nous est donc malheureusement peu utile.

Minimal Covering Set et Bipartisan Set, dont on sait qu'elles sont faiblement supermonotones, peuvent elles aussi être appliquées à un profil de préférences en utilisant une fonction tournoyante quelconque, et il en résulte un rangement, malheureusement seulement faiblement monotone.

On remarquera que la proposition 2 de Bouyssou, qui semble en contradiction avec les résultats de Juret sur la rationalisation, souligne en fait le caractère trop fort de l'axiome de rationalisation. En effet, aucune procédure compatible avec le vainqueur de Condorcet (lorsqu'il existe) ne respecte cet axiome, et le résultat n'a donc pas un grand intérêt en réalité, comme le laissait présager l'absence de procédure de choix sur laquelle appliquer ce résultat.

Ainsi, l'étude du cas particulier des choix itérés dans les tournois a permis de dégager quelques résultats intéressants et de construire de nouvelles procédures de choix (faiblement) supermonotones, mais surtout de constater que même sur ce cas particulier, la monotonie semble être une condition trop forte pour trouver des procédures satisfaisantes la respectant (par exemple, Top Cycle, seule procédure connue supermonotone sur les tournois, n'est pas discriminante). Les résultats de Bouyssou sont un argument supplémentaire pour douter de la possibilité de trouver de nombreuses procédures supermonotones et raisonnablement discriminantes. On peut aussi remarquer que pour trouver une condition nécessaire à la supermonotonie, il faut s'assurer que le viol de cette condition nécessaire se produit sur un des ensembles appartenant à l'itération descendante de C, ce qui est l'une des raisons de la difficulté de cette approche.

# 5 Conclusion

En théorie du choix social, l'agrégation de préférences sous la forme d'un rangement est une problématique essentielle qui a par exemple donné lieu au célèbre théorème d'Arrow. Lorsque l'on agrège des préférences, une manière efficace et classique d'obtenir un rangement est d'attribuer des scores à chaque candidat et de les ordonner en conséquence. Une autre approche consiste à itérer une procédure de choix, ce qui a plusieurs avantages par rapport à l'approche classique ; cependant, l'introduction de ce degré supplémentaire de complexité rend l'étude de telles procédures très délicate et amène encore peu de résultats réellement concluants. Une propriété fondamentale de ces rangements, et dont on peut difficilement envisager qu'elle soit violée dans une procédure satisfaisante, est la monotonie, qui assure une certaine cohérence entre les préférences des votants et la préférence collective, en garantissant des évolutions corrélées.

La problématique de la monotonie illustre parfaitement à quel point la décomposition d'un processus de décision (pourtant généralement souhaitable, et à première vue plus compréhensible pour un humain) peut paradoxalement compliquer l'étude théorique de propriétés pourtant élémentaires et se comporter de façon inattendue. Dans notre cas, les conditions suffisantes présentées pour caractériser les procédures de choix supermonotones s'avèrent largement insuffisantes. L'introduction de la notion de suivi itératif d'un score monotone sous forme d'une équivalence avec la supermonotonie n'amène pas non plus d'idée prometteuse pour mieux caractériser ou comprendre les procédures de choix supermonotones. Face à ces difficultés, l'étude des choix itérés dans les tournois faibles a permis de dégager quelques résultats intéressants et de construire de nouvelles procédures de choix faiblement supermonotones, mais aussi et surtout de nuancer la possibilité de résultats généraux satisfaisants.

Le bilan est donc assez négatif ; on connaît très peu de procédures de choix supermonotones, et les rares que l'on a exhibées ne sont que peu discriminantes. Les conditions suffisantes de Juret faisant intervenir la rationalisation semblent être en fait peu efficaces et ne pas concerner les procédures généralement étudiées. Les scores monotones s'avèrent encore plus décevants à plusieurs titres : ce ne sont que la traduction numérique de propriétés ordinales, ils ne sont pas nécessaires dans les démonstrations, et ils sont utilisés pour des procédures (Schwartz et Maximin) pour lesquelles l'itération est inutile ! Du côté des résultats de Bouyssou, si l'on trouve un résultat positif, celui-ci ne concerne que la monotonie faible, qui semble tout de même une propriété trop permissive la plupart du temps. Ce pessimisme est confirmé par son deuxième résultat principal, sous la forme d'une proposition d'impossibilité.

Dans ce contexte, les contributions de ce document, signalées par un * pour les définitions nouvelles et les résultats, sont modestes : en premier lieu, faire une présentation précise et détaillée du problème de monotonie dans les procédures procédant par choix itérés, en mettant l'accent sur la compréhension des définitions, des propriétés ou des méthodes employées, et en décrivant les mécanismes mis en jeu dans les procédures non monotones. Ensuite, établir un lien formel entre les procédures de rangement itératives et les procédures par raffinement progressif, pour transposer les résultats obtenus entre ces deux types de procédures. Enfin, porter un regard critique sur les résultats présentés dans les différents articles et s'attacher à faire le point sur l'intérêt réel des différents résultats obtenus. On trouvera en annexes une grande partie des démonstrations, et plusieurs idées développées en marge de ce travail.

De nombreuses pistes restent à approfondir ou explorer. Caractériser de façon plus satisfaisante les procédures de choix supermonotones semble absolument indispensable dans le cas général. On peut aussi s'intéresser aux cas où les préférences des votants sont définies autrement et ne pas se limiter, par exemple, à des préférences transitives (il est en effet raisonnable de supposer que, bien souvent, les votants évaluent les candidats sur plusieurs critères, qu'ils agrègent ensuite, et qu'ils ne sont donc pas toujours en mesure de fournir chacun un rangement des candidats) ou complètes (ce qui suppose en général de connaître l'ensemble des candidats). Relativiser et quantifier à quel point une procédure de rangement itérative n'est pas monotone est aussi une voie pertinente : on peut ne pas se satisfaire de contre-exemples, et étudier la probabilité d'apparition de tels phénomènes dans des profils de préférences aléatoires, ou isoler des sous-groupes de profils délicats sur lesquels on n'exigera pas d'être monotone. Une dernière piste envisageable est l'étude de la manipulabilité de telles procédures, selon les différents buts que le votant souhaite atteindre.

La thématique est donc riche et encore largement à explorer, même s'il faut toujours garder à l'esprit la forte vraissemblance, en considérant cette étude, de l'échec pour trouver des conditions générales satisfaisantes ; il faudra donc probablement attaquer le problème sous plusieurs angles et se méfier des axiomes que l'on souhaite souvent trop rapidement voir vérifiés, alors qu'ils ne sont pas si naturels, ou qu'ils restreignent de façon excessive les procédures envisageables ou leur pouvoir de discrimination.

# Annexes

## A - Définitions équivalentes de la monotonie

Une propriété essentielle des procédures de choix et de rangement est la *monotonie*. La monotonie$^+$ d'une procédure de choix ou de rangement formalise l'idée naturelle selon laquelle, si la position d'un candidat s'améliore dans les préférences des votants (il devient plus populaire), alors il ne peut en être désavantagé dans le résultat du processus de décision (que ce soit un vote ou un classement).

Il existe une notion duale, la monotonie$^-$ : si la position d'un candidat se détériore dans les préférences des votants (il devient moins populaire), alors il ne peut en être avantagé dans le résultat du processus de décision (que ce soit un vote ou un classement).

Ces deux propriétés semblent être des conditions absolument légitimes et nécessaires pour toute procédure de vote ou de rangement. Nous présentons ici une définition formelle de la monotonie (+), comme présentée dans l'article de Vincke [**?**], et une démonstration de l'équivalence avec la monotonie$^-$ que nous formalisons*.

Soient $(\pi, \pi') \in \Pi(X)^2$. On dit que $\pi'$ améliore de façon élémentaire $a$ (au détriment de $b$) par rapport à $\pi$ et l'on note $\pi' >_{a/b} \pi$ (ou en abrégé $\pi' >_a \pi$) ssi :

$$\exists\, i \in N \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{l} \forall j \neq i,\ \geq'_j = \geq_j \\ \forall \{y,z\} \neq \{a,b\} \in A^2, y \geq'_i z \Leftrightarrow y \geq_i z \\ (b >_i a \text{ et } a \geq'_i b) \text{ ou } (b \sim_i a \text{ et } a >'_i b) \end{array} \right.$$

Cela correspond donc au cas où l'un des votants favorise un candidat $a$ en l'échangeant dans ses préférences avec $b$ qui lui était immédiatement supérieur (ou égal).

On définit la *monotonie*$^+$ d'une procédure de rangement R par :

$\forall A \neq \emptyset \subseteq X,\ \forall a \in A,\ \forall (\pi, \pi') \in \Pi(A)^2$ tels que $\pi' >_a \pi$, si $\geq = R(A, \pi)$ et $\geq' = R(A, \pi')$

$$\forall\, b \in A,\ \left\{ \begin{array}{l} a \sim b \Rightarrow a \geq' b \\ a > b \Rightarrow a >' b \end{array} \right.$$

On définit la *monotonie*$^-$ d'une procédure de rangement R par :

$\forall A \neq \emptyset \subseteq X,\ \forall a \in A,\ \forall (\pi, \pi') \in \Pi(A)^2$ tels que $\pi >_a \pi'$, si $\geq = R(A, \pi)$ et $\geq' = R(A, \pi')$

$$\forall\, b \in A,\ \left\{ \begin{array}{l} b > a \Rightarrow b >' a \\ b \sim a \Rightarrow b \geq' a \end{array} \right.$$

On se propose de montrer l'équivalence entre ces deux formulations de la notion de monotonie, et l'on pourra donc parler sans ambiguïté de la *monotonie* d'une procédure de rangement.

PROPOSITION : R monotone$^+$ $\Leftrightarrow$ R monotone$^-$.

Preuve :

Supposons que R est monotone$^+$. Soient $A \neq \emptyset \subseteq X,\ a \in A,\ (\pi, \pi') \in \Pi(A)^2$ tels que $\pi' >_a \pi$. On note $\geq = R(A, \pi)$ et $\geq' = R(A, \pi')$. Soit $b \in A$. Alors, comme R est monotone$^+$ :

$$\begin{cases} a \sim b \Rightarrow a \geq' b & \text{(i)} \\ a > b \Rightarrow a >' b & \text{(ii)} \end{cases}$$

La contraposée de (i) s'écrit : $b >' a \Rightarrow (a > b \text{ ou } b > a)$ (i').
La contraposée de (ii) s'écrit : $b \geq' a \Rightarrow b \geq a$ (ii').

Si $b >' a$, alors $b \geq' a$, et alors par (ii'), $b \geq a$, c-à-d $\neg(a > b)$. On a donc, en utilisant ce résultat dans (i') : $b >' a \Rightarrow b > a$ (i")
Si $b \sim' a$, alors $b \geq' a$, et alors par (ii'), $b \geq a$. On a donc : $b \sim' a \Rightarrow b \geq a$ (ii")

On a donc, par (i") et (ii") :

$$\begin{cases} b >' a \Rightarrow b > a & \text{(i")} \\ b \sim' a \Rightarrow b \geq a & \text{(ii")} \end{cases}$$

ce qui, compte tenu des données initiales, veut exactement dire que R est monotone$^-$. La réciproque se démontre de façon rigoureusement analogue.

## B - Justification empirique de l'itération du choix et limites

Il est intéressant de comprendre les raisons qui nous poussent naturellement à itérer une procédure de choix qui ne nous donne pas entière satisfaction, et à montrer les limites de cette façon de procéder.

Considérons le profil suivant :

$$(E6) \quad \begin{cases} 4\times & x > y > z \\ 3\times & z > y > x \\ 2\times & y > z > x \end{cases}$$

$x$ est élu au scrutin uninominal majoritaire à un tour, alors même que c'est le perdant de Condorcet ! Cette procédure de vote n'est donc pas satisfaisante, en raison d'une utilisation trop partielle des préférences des votants (on utilise seulement leur candidat préféré).

Pour améliorer la procédure, une idée naturelle est de faire un second tour, qui réunira les deux meilleurs candidats. Sur notre exemple, cela aboutit à l'élection de $z$. C'est donc déjà mieux, mais on aurait voulu que le vainqueur soit $y$, qui est vainqueur de Condorcet (et donc garant d'une stabilité forte en cas d'élection) ! Il semble ensuite assez naturel de généraliser le procédé à $n$ tours (au plus) lorsqu'il y a $n + 1$ candidats, en éliminant à chaque tour le candidat qui a reçu le moins de suffrages : il s'agit donc d'une procédure RAP. On espère ainsi palier, autant que possible, la vision partielle du score uninominal.

Cette façon naturelle d'améliorer une fonction de score qui utilise partiellement les préférences des votants a cependant ses limites : dans (E6), le vainqueur de Condorcet sera quoi qu'il en soit éliminé dès le premier tour, car il a un score uninominal minimal. Nous généralisons ce cas de figure dans l'annexe C.

La démarche logique que l'on souhaiterait proposer, par exemple, pour améliorer la procédure de vote présidentielle française, en s'appuyant toujours sur un scrutin uninominal majoritaire, ne sera donc jamais totalement satisfaisante (on peut éliminer le vainqueur de Condorcet). Il existe en fait de nombreuses façons d'utiliser un score dans une procédure de vote : on pourrait, par exemple, faire voter pour les candidats "détestés" de chaque votant, et éliminer le candidat le plus impopulaire. Nous développons ces idées dans l'annexe F.

## C - Dictature de la plus grande minorité et dispersion des votes

Soit $N$ l'ensemble des votants, que l'on va partitionner en $(p+1)$ communautés de votants $(E_1, ..., E_p,\ A)$. Les $(E_i)$ sont des communautés égoïstes, qui privilégient leurs intérêts sans se soucier des conséquences pour les autres. Au contraire, les votants de $A$, malheureusement largement minoritaires (on suppose que : $\forall i, |E_i| > |A|$), sont altruistes, et privilégient donc les intérêts collectifs.

Les alternatives $z_i$ pour lesquelles il s'agit de voter sont également au nombre de $p+1$ : $\forall i, z_i$ est une alternative très favorable à $E_i$ et très défavorable aux autres votants. $z_0$ est quand à elle la solution de compromis, qui est assez favorable à tous les votants.

Les votants de $E_i$ préfèrent l'alternative $z_i$ qui leur est la plus favorable à la solution de compromis $z_0$, qu'ils préfèrent à toutes les autres alternatives entre lesquelles ils sont indifférents (ils voteraient blanc ou s'abstiendraient s'ils devaient choisir entre elles). Les votants altruistes de $A$, pour leur part, préfèrent la solution $z_0$ à toutes les autres entre lesquelles ils sont indifférents.

$$\begin{cases} \forall i, E_i : & z_i > z_0 > z_1 \sim z_2 \sim ... \sim z_{i-1} \sim z_{i+1} \sim ... \sim z_p \\ \text{A} & z_0 > z_1 \sim ... \sim z_p \end{cases}$$

Quelle que soit la méthode uninominale employée (on vote pour son candidat préféré seulement), la solution de compromis $z_0$ sera éliminée dès le premier tour, alors même que c'est le gagnant de Condorcet (que l'on juge dans ce cas particulièrement attractif, bien que le gagnant de Condorcet constitue parfois une dictature de la majorité au détriment d'un compromis si les votants coopèrent ou sont altruistes). Si l'on note $E_k$ la communauté égoïste majoritaire, toute procédure de vote utilisant la méthode uninominale aboutira à l'élection de l'alternative $z_k$, ce qui constitue ce que l'on appellera une *dictature de la plus grande minorité*. Au final, toutes les autres communautés ont beaucoup perdu à être égoïstes et auraient du voter pour la solution de compromis $z_0$ dès le premier tour. Cela met bien en évidence un phénomène de dispersion des voix, qui aboutit à l'élimination immédiate de l'alternative sur laquelle tous les votants, sauf une minorité (appartenant à la communauté égoïste majoritaire) se seraient reportée après l'élimination de leur favori, et qui aboutit à l'élection d'un candidat qui ne sert pas les intérêts de la société et qui amène à douter du caractère démocratique du résultat de l'élection.

Cela met donc en lumière de graves défauts dans le principe même du scrutin uninominal majoritaire, qui n'exploite pas suffisamment les préférences des votants (auxquels on ne demande de dévoiler que leur favori parmi les candidats encore en course). On comprend aussi pourquoi il est si difficile de présenter sa candidature à la présidence de la république en France (trop de candidats aboutirait à une dispersion des voix et pourrait constituer une menace grave pour la démocratie).

Pour illustrer cette dictature de la plus grande minorité, prenons l'exemple frappant et réaliste de l'élection présidentielle dans un pays dans lequel les conditions de vie difficiles et les tensions entre les communautés incitent au repli identitaire. Supposons qu'un candidat se présente pour chacune des communautés, avec l'intention de favoriser les intérêts de sa communauté, et qu'un candidat d'union nationale défende les intérêts du pays et souhaite dépasser ces clivages.

Il sera alors très tentant, pour les membres d'une communauté, compte-tenu de l'état du pays, de voter pour leur candidat, en espérant ainsi voir leur communauté enfin respectée et leur quotidien s'améliorer. Seulement une minorité de votants altruistes apportent leur suffrage au candidat d'union nationale. On se retrouve alors dans la situation évoquée précédemment, avec les résultats que l'on sait. Le pays sera en proie à de graves troubles, et une guerre civile est vraissemblable. Il aurait été plus judicieux dans ce cas d'élire le vainqueur de Condorcet, qui garantit une stabilité. Cet exemple illustre parfaitement les conséquences extrêmement graves que peuvent avoir le choix d'un mode de scrutin inadapté à la décision à prendre.

Le dernier aspect important est la notion de stratégie à adopter par les votants et de manipulation d'une élection : ici, on remarque que, si les votants réfléchissent et anticipent le comportement des autres votants, ils ne voteront pas selon leurs préférences réelles (sauf pour la minorité majoritaire). On s'approche donc du cadre de la théorie des jeux, liée aux problèmes de manipulabilité des procédures de vote, et à l'intérêt stratégique des votants à ne pas exprimer leur opinion réelle (ce qui n'est pas nécessairement une mauvaise chose sur notre exemple), développé en annexe K.

## D - Propriétés de la procédure de choix duale

Soit $C$ une procédure de choix. On rappelle que $C^*$ est définie par :

$$\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X, \forall\, \pi \in \Pi(A),\, C^*(A,\pi) = \begin{cases} \mathrm{A} \setminus C(A,\pi^{-1}) & \text{si } A \setminus C(A,\pi^{-1}) \neq \emptyset \\ \mathrm{A} & \text{sinon} \end{cases}$$

PROPRIETE 1 : $C^*$ est une procédure de choix.

Preuve : $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X,\ \forall\, \pi \in \Pi(A),\ C^*(A,\pi) \neq \emptyset$. $C^*$ est donc bien une procédure de choix.

PROPRIETE 2 : $(C^*)^* = C$

Preuve : $\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X,\ \forall\, \pi \in \Pi(A)$
- soit $A \setminus C(A, \pi) \neq \emptyset$.
On a donc : $C^*(A, \pi^{-1}) = A \setminus C(A, (\pi^{-1})^{-1}) = A \setminus C(A, \pi)$
et alors $(C^*)^*(A, \pi) = A \setminus C^*(A, \pi^{-1}) = A \setminus (A \setminus C(A, (\pi)) = C(A, \pi)$
- soit $C(A, \pi) = A$. Alors : $C^*(A, \pi^{-1}) = A$ et $(C^*)^*(A, \pi) = A = C(A, \pi)$.
On a donc bien $(C^*)^* = C$.

PROPRIETE 3 : $C$ monotone $\Leftrightarrow$ $C^*$ monotone

Preuve : Supposons $C$ monotone. Il suffit d'appliquer les deux définitions équivalentes de la monotonie sur $C^* = A \setminus C(A, \pi^{-1})$. On obtient la réciproque en remplaçant $C$ par $C^*$.

## E - Démonstration de l'équivalence entre RIT et RAP

On se propose de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1 : $RAP_C(A, \pi) = (RIT_{C^*}(A, \pi^{-1}))^{-1}$

Intuitivement, cela correspond à des procédures RIT et RAP qui sont très similaires : en retournant le profil et en appliquant l'une des procédures, on obtient l'ordre inverse de ce que l'on aurait obtenu avec l'autre. Cela permet donc de formaliser joliment les similitudes existant entre certaines procédures qui n'aboutissent cependant pas, dans le cas général, au même résultat sur le même profil. L'exemple typique déjà évoqué est le parallèle entre choisir le meilleur candidat (en terme de vote uninominal) ou éliminer le plus détesté.

Preuve : on va montrer par récurrence que, lors du déroulement de $RAP_C(A, \pi)$ et $RIT_{C^*}(A, \pi^{-1})$, on a à tout instant $C_k^{RIT} = C_k^{RAP}$ et $A_k^{RIT} = A_k^{RAP}$ (avec les notations évidentes).
A l'étape 1, on pose $A_1 = A = A_1^{RIT} = A_1^{RAP}$.
Par définition de RIT et RAP, on a : $C_1^{RIT} = C(A_1, \pi_{|A_1})$ et $C_1^{RAP} = A_1 \setminus C^*(A_1, \pi_{|A_1}^{-1})$.
$\rightarrow$ Si $A_1 = C^*(A_1, \pi_{|A_1}^{-1})$, on a en revenant à la définition du dual :
$A_1 = C(A_1, (\pi_{|A_1}^{-1})^{-1}) = C(A_1, \pi_{|A_1})$ alors l'algorithme RAP s'arrête et (ligne 8 de RAP) :
$C_1^{RAP} = A_1 = C_1^{RIT}$. L'algorithme RIT s'arrête également car $A_2^{RIT} = \emptyset$.
$\rightarrow$ Sinon, $C_1^{RAP} = A_1 \setminus C^*(A_1, \pi_{|A_1}^{-1}) = A_1 \setminus (A_1 \setminus C(A_1, (\pi^{-1})_{|A_1}^{-1}) = C(A_1, \pi_{|A_1}) = C_1^{RIT}$.
Et alors : $\mathrm{A}_2^{RIT} = A_1 \setminus C_1^{RIT} = A_1 \setminus C_1^{RAP} = A_2^{RAP}$.
Cette démonstration s'étend da manière analogue pour toute étape k.

A chaque étape, on choisit les mêmes éléments dans les deux procédures. Les ordres étant définis en fonctions des $C_k$ et dans des sens opposés pour $RAP_C(A, \pi)$ et $RIT_{C^*}(A, \pi^{-1})$, on a bien l'égalité de la proposition 1.

## F - Procédures de rangements définies à partir d'un score

Nous nous intéressons au cas particulier des scores et montrons comment construire des familles de procédures monotones à partir d'une procédure monotone.

Considérons une fonction de score $s$ induisant une procédure de choix $F_s$ monotone. Un exemple simple d'une telle fonction est le vote uninominal à un tour, $U$, le score étant alors défini pour chaque candidat par le nombre de votants l'ayant positionné en première position.

A partir de cette fonction de score, il existe différentes façons d'obtenir un rangement :

- $R_s$, probablement la plus évidente et la plus classique : ranger par score décroissant. Dans le cas de $U$, les candidats sont ordonnés selon le nombre de votants qui les classent premiers.
- $R_{-s}$ calculé sur l'inverse du profil. C'est une façon "duale" d'utiliser le score pour obtenir un rangement : passer à l'inverse du profil, calculer les scores et classer les candidats par score croissant. Avec $U$, les candidats sont ordonnés de façon croissante selon le nombre de votants qui les classent derniers.

A partir d'un score $s$, il existe aussi 4 méthodes itératives basées sur l'élimination ou la sélection de candidats combinées à des critères de minimisation/maximisation du score $s$ :

(a) sélection du candidat le plus populaire à chaque étape : $RIT_{F_s}$ sur $\pi$
(b) sélection du candidat le moins impopulaire à chaque étape : $RIT_{F_{-s}}$ sur $\pi^{-1}$
(c) élimination du candidat le moins populaire à chaque étape : $RAP_{F^*_{-s}}$ sur $\pi^{-1}$
(d) élimination du candidat le plus impopulaire à chaque étape : $RAP_{F^*_s}$ sur $\pi$

Remarques : il se peut que plusieurs candidats ex-aequo soient traités à chaque étape, mais parler de "un candidat" fixe plus facilement les idées.

Les procédures (b) et (c) sont duales. Il en va de même pour les procédures (a) et (d). Il y a donc équivalence pour la monotonie entre (b) et (c) d'une part, et (a) et (d) d'autre part.

Cependant, les 4 méthodes peuvent être différentes, comme le montre l'exemple suivant, avec comme fonction score le vote uninominal à un tour $U$ :

$$\begin{cases} x > z > y \\ x > z > y \\ x > y > z \\ y > z > x \\ z > y > x \end{cases}$$

On obtient alors des rangements différents avec les procédures a,b,c et d.

a : $x > z > y$
b : $z > x > y$
c : $x > y \sim z$
d : $z > x \sim y$

Dans le cas du score de Borda B, les procédures (a) et (b) sont égales, car lorsque l'on inverse un profil, l'ordre des scores de Borda s'inverse (et donc le candidat le moins impopulaire est en fait le plus populaire puisqu'il minimise $-B$ donc maximise $B$). Il en est de même pour les procédures (c) et (d). Les procédures sont donc 2 à 2 duales ou égales. Par conséquent, il y a équivalence en monotonie entre les 4 procédures. Aucune des 4 procédures n'est donc monotone, puisque l'on a déjà montré que la procédure (a) associée au score de Borda n'était pas monotone !

On peut en fait généraliser l'équivalence en monotonie entre les 4 procédures à toute fonction de score $s$ telle que $argmax_X(s(a,\pi)) = argmin_X(s(a,\pi^{-1}))$, puisque c'est la seule propriété du score de Borda que l'on a utilisé pour conclure. On remarque que ce n'est bien entendu pas le cas du score unominal à un tour.

## G - La procédure de Schwartz

Juret justifie l'introduction et la pertinence de la notion de respect itératif de scores monotones en s'appuyant principalement sur leur utilisation dans la preuve que la procédure de Schwartz est supermonotone [**?**]. Nous allons montrer que ce n'est pas nécessaire (et même que ne pas les utiliser simplifie et raccourcit la preuve qui se réduit à un problème de graphe).

La procédure de (choix de) Schwartz S est définie par :

$\forall\, \emptyset \neq A \subseteq X,\ \forall\, \pi \in \Pi(A),\ S(A,\pi) = \{x \in A \ / \ \forall\, y \in A, \neg(y >_{A,\pi} x)\}$, où $>_{A,\pi}$ est un ordre strict partiel sur A défini comme la partie asymétrique de la fermeture transitive $>^t_{A,\pi}$ de la relation majoritaire $>^M_{A,\pi}$, avec $(a >^M_{A,\pi} b \ \Leftrightarrow\ |\{i \ / \ a >_i b\}| > |\{i \ / \ b >_i a\}|)$.

Cette définition peut sembler aride et l'idée sous-jacente obscure. En fait, la relation de Schwartz s'interprète très bien en terme de graphes. Nous noterons donc $G^M_A(\pi)$ le graphe correspondant à la relation majoritaire, $G^t_A(\pi)$ sa fermeture transitive et $G_A(\pi)$ la partie asymétrique, correspondant donc à la relation $>_{A,\pi}$. On remarque que la procédure de Schwartz est binaire (un candidat bat ou ne bat pas un autre) et donc extrêmement sensible à des variations minimes des préférences des votants qui modifient une relation de majorité.

Cette procédure apporte cependant une réponse efficace et naturelle au paradoxe de Condorcet, qui peut se produire s'il y a un cycle dans le graphe $G^M_A(\pi)$. A défaut de pouvoir désigner un vainqueur de Condorcet, une idée naturelle serait de choisir un *groupe de vainqueurs de Condorcet*, tel que les candidats du groupe ne soient jamais battus (au sens de la relation majoritaire) par les candidats hors du groupe, et réciproquement tel qu'aucun candidat hors du groupe ne pourrait prétendre à y rentrer (il est donc battu par au moins l'un des membres du groupe). Par exemple, X, l'ensemble de tous les candidats, vérifie ces propriétés. L'idée est donc, pour être discriminant, de choisir le plus petit groupe (au sens de l'inclusion) les vérifiant (un tel groupe existe, car l'intersection de 2 groupes vérifiant ces propriétés le vérifie toujours, la preuve est immédiate).

Pour déterminer ce groupe, on enlève les cycles du graphe après avoir calculé sa fermeture transitive (deux sommets d'un même cycle sont alors reliés par une double arête), formalisant ainsi l'idée que les candidats d'un même cycle ne peuvent pas être départagés, et qu'ils sont donc indifféremment choisis ou rejetés (on peut montrer très facilement que c'est le cas avec S). On remarque que l'intérêt de spécifier la relation majoritaire de façon stricte (il n'y a donc pas d'arêtes dans le graphe majoritaire entre 2 candidats ex-aequos dans leur confrontation) est de pouvoir tout de même départager ces 2 candidats par l'intermédiaire de leurs confrontations avec d'autres candidats, et d'être potentiellement plus discriminant.

A partir du graphe résultant, on choisit les candidats correspondant aux sommets maximaux (c-à-d de degré entrant nul), ce qui revient à choisir le noyau du graphe. Itérer la procédure de Schwartz (sous forme d'une procédure de rangement RIT) est en fait équivalent à construire le graphe $G_A(\pi)$ et à itérer la fonction noyau sur ce graphe fixé (un peu de réflexion suffit à s'en convaincre mais nous n'en ferons pas une démonstration rigoureuse).

Nous allons maintenant prouver que la procédure de Schwartz est supermonotone, en montrant que la monotonie du rangement itératif correspondant peut se réduire à un problème de chemins dans un graphe orienté sans circuit.

Soit $\emptyset \neq A \subseteq X$ et $\pi \in \Pi(A)$ et $(a, b) \in A^2$. On notera $>_A = RIT_S(A, \pi)$ et $b \to a$ s'il y a une arête de $a$ à $b$ dans $G^t_A(\pi)$.

Le lemme suivant dit qu'une arête qui n'est pas double dans la fermeture transitive du graphe permet d'en déduire un ordre dans le rangement final, ce qui paraît logique.

Lemme : $\forall (a, b) \in A^2$, dans $G^t_A(\pi)$, $(b \to a$ et $\neg(a \to b)) \Rightarrow b >_A a$.

Preuve : supposons $(a \to b$ et $\neg(b \to a))$. On a alors une arête de $a$ vers $b$ dans $G_A(\pi)$ (puisque c'est la partie asymétrique de $G^t_A(\pi)$). par récurrence ? Dans le déroulement de l'algorithme $RIT_S(A, \pi)$, à l'étape k, tant que $a$ et $b$ n'ont pas été choisis, l'arête de $a$ à $b$ est toujours présente dans le graphe $G_{A_k}(\pi)$. $b$ ne peut pas être choisi par S tant qu'il reste $a$ dans l'ensemble des candidats (car le degré entrant de $b$ est non nul à cause de l'arête de $a$ vers $b$). $a$ est donc choisi strictement avant $b$ au cours du déroulement de l'algorithme $RIT_S(A, \pi)$. D'où : $b >_A a$.

Soit $\pi' \in \Pi(A)$ tel que $\pi' >_{a/b} \pi$. On notera $>'_A = RIT_S(A, \pi')$ et $b \to' a$ s'il y a une arête de $a$ à $b$ dans $G^{\,t}_A(\pi')$. Si le passage de $\pi$ à $\pi'$ n'a altéré aucun relation majoritaire, il n'y aucune modification dans les graphes et la monotonie de la procédure itérée est vérifiée puisque le rangement final est identique.

Sinon, la seule relation majoritaire qui peut évoluer entre $\pi$ et $\pi'$ est celle entre $a$ et $b$, en faveur de $a$. Dans $G^M_A(\pi')$, les seuls changements qu'il peut y avoir sont donc l'apparition de l'arête $a \to' b$ et/ou la disparition de l'arête $b \to' a$. Dans $G^{\,t}_A(\pi')$, les mêmes changements peuvent se produire (conjointement à d'autres consécutifs à la transitivité).

Si les graphes $G_A^t(\pi')$ et $G_A^t(\pi)$ sont identiques, la monotonie est vérifiée puisque le rangement final est identique. Sinon, on est dans l'un des cas suivants (on s'est contenté de faire une liste exhaustive des cas possibles où au moins une arête est modifiée entre les deux graphes) :

(pas d'arête entre $a$ et $b$ dans $G_A^t(\pi)$) et $a \to' b$
$(b \to a,\ a \to b)$ et $a \to' b$
$b \to a$ et (pas d'arête entre $a$ et $b$ dans $G_A^t(\pi')$)
$b \to a$ et $(b \to' a,\ a \to' b)$
$b \to a$ et $a \to' b$

et on conclut immédiatement en utilisant le lemme 1 pour montrer que $b >_A a$ ou que $a >_A^{'} b$, selon les cas, ce qui implique dans les 2 cas que la propriété de monotonie est vérifiée.

Soit alors $(c, d) \in A^2$. La possible création de l'arête $a \to' b$ n'a pu faire apparaître que des chemins du type $a \to' b \to' c$ donc l'arête $a \to' c$, et la possible suppression de l'arête $b \to' a$ n'a pu faire disparaître que des chemins du type $c \to' b \to' a$ donc l'arête $c \to' a$.

On se retrouve donc dans le cas de figure traité précédemment entre $a$ et $b$ et l'on conclut donc sur le respect de la propriété de monotonie par $a$ pour tout $c$.

Le rangement itéré est donc monotone et la procédure de Schwartz supermonotone.

On peut montrer sur un cas de figure très simple que la procédure de Schwartz ne respecte pas la propriété $\alpha$. Considérons les préférences $\pi = (a > b > c,\ b > c > a,\ c > a > b)$ pour $X = \{a, b, c\}$ et 3 votants. Du point de vue des scores de Condorcet, $a > b > c > a$, donc $S(X, \pi) = \{a, b, c\}$. Pour $A = \{a, b\}$, $S(A, \pi_{|A}) = \{a\}$. D'où : $S_\pi(X) \bigcap A = \{a, b\}$ n'est pas inclus dans $\{a\} = S_\pi(A)$, ce qui viole la propriété $\alpha$.

Cette propriété $\alpha$ n'est donc peut-être pas si naturelle que cela, puisque le fait qu'elle soit violée dans Schwartz paraît logique. En effet, $a > b$ (en terme de tournois) permet de conclure à la supériorité de $a$, mais cette conclusion est invalidée si l'on ajoute un candidat $c$ et que $b > c > a$, et il n'y a rien de choquant à cela.

Il faut toujours se méfier des propriétés dont on souhaite absolument qu'elles soient vérifiées parce qu'elles nous paraissent logiques et naturelles... alors qu'en fait elles ne le sont pas tant que ça en pratique !

## H - Propriétés d'indépendance et supermonotonie

Dans l'étude de la supermonotonie, plusieurs propriétés proches d'une notion d'*indépendance* ont été définies. Ces propriétés sont très diverses et expriment de façons très différentes des idées proches. Il semble que le concept d'indépendance, au sens large, joue un rôle fondamental dans la supermonotonie (ce qui s'explique bien par la structure même de l'itération du choix).

Cependant, il faut se méfier de ces propriétés d'indépendance, qui prétendent traduire sous forme axiomatique un comportement apparemment souhaitable, mais qui se révèlent en pratique souvent trop contraignantes, et finalement pas si naturelles et souhaitables.

Dans ce contexte, on peut s'interroger sur la portée réelle du théorème d'Arrow. En considérant par exemple le cas où la relation majoritaire est cyclique ($a > b > c > a$ en terme de scores de Condorcet), il n'est absolument pas choquant de ne pas vérifier l'indépendance classique. Mais alors, le théorème d'Arrow est-il vraiment si important ?

Il existe donc un certain nombre de définitions liées à l'indépendance ; nous nous proposons ici de faire un petit bilan de celles que nous avons définies dans le cadre de la supermonotonie. Les propriétés suivantes traduisent une notion d'indépendance plus ou moins directe :

- indépendance vis-à-vis des alternatives non concernées
- propriété $\alpha$
- indépendance forte
- fonction de choix locale
- SSP
- Aizerman
- ...

Ces axiomes d'indépendance, qui peuvent paraître plus ou moins naturels, se heurtent à des contradictions pratiques dans des cas de figure simples (par exemple, lorsque la relation majoritaire est cyclique). Qui plus est, il semble que peu de procédures vérifient l'axiome d'indépendance classique ou la propriété $\alpha$, et que celles qui le vérifient ne soient absolument pas discriminantes, ce qui contribue à décrédibiliser, ou tout du moins à nuancer le bien-fondé de ces axiomes.

## K - Manipulabilité des rangements par choix itérés

Une question qui vient à l'esprit, compte-tenu de la complexité des rangements par choix itérés, est celle de leur manipulation. En effet, si elle s'avérait plus difficile que pour les rangements sans itération, cela pourrait être un argument intéressant en leur faveur.

Encore faut-il définir la manipulabilité d'une procédure de rangement, qui diffère de celle d'une procédure de choix. Une définition possible est que l'on veuille que notre candidat préféré soit le mieux placé possible : peut-on alors modifier notre préférence individuelle pour arriver à nos fins ? On peut imaginer un tel cas de figure dans le cadre d'un concours où l'on veut qu'un certain candidat soit le mieux classé possible au final, le classement se faisant par sélections ou éliminations successives des candidats. Dans le cas où la procédure de choix est supermonotone, on aura bien entendu intérêt à placer notre candidat en premier, mais l'ordre des autres candidats influe potentiellement sur le résultat final ! Mais déterminer une modification favorable semble probablement complexe.

Une autre définition de la manipulabilité d'un rangement peut consister à obtenir un rangement final aussi proche que possible (en supposant disposer d'une distance sur les ordres) de notre préférence. La définition consistant à ce que la première classe d'équivalence nous soit la plus favorable possible rejoint la définition classique de manipulabilité d'une procédure de choix (et n'a donc pas d'intérêt dans le cas de l'itération).

Une autre approche serait de développer des définitions de la manipulabilité pour des procédures de choix en plusieurs tours : on s'intéresse uniquement aux vainqueurs d'une procédure RAP. La complexité de la procédure itérée rend probablement difficile une telle manipulation. On peut aussi considérer des variantes où on peut modifier ses préférences entre les tours (ce sera typiquement le cas d'un votant qui a voulu faire éliminer un candidat par choix stratégique mais qui, une fois arrivé à ses fins, va revenir à ses préférences initiales). Par exemple, en politique, un électeur de droite à la présidentielle 2007 aurait eu intérêt à voter à gauche au premier tour pour s'assurer de l'élimination du candidat du centre au deuxième tour, mais cet électeur revoterait évidemment à droite au second tour. Prendre en compte cette dynamique des préférences dans le cadre de la manipulation de procédures de votes RAP introduit un degré supplémentaire de complexité.

On remarquera au passage qu'une procédure RAP peut donc être utile pour faire une procédure de choix (et non pas seulement pour faire un rangement), ce qui ne rentre pas dans le cadre de notre travail mais souligne la pertinence de l'itération du choix même lorsque le résultat que l'on souhaite obtenir n'est pas un rangement. Cette utilisation est d'ailleurs évoquée par Bouyssou [**?**] comme un axe de recherche possiblement intéressant, qui rend potentiellement plus discriminante une procédure de choix en l'itérant, comme c'est le cas dans le raffinement progressif.